

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

15. Band, Heft 8 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 337—384

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Stammler, Gerhard: Deutsche Logikarbeit seit Hegels Tod als Kampf von Mensch, Ding und Wahrheit. Bd. 1. Spekulative Logik.** Berlin: Verl. f. Staatswiss. u. Geschichte G. m. b. H. 1936. XII, 551 S. RM. 25.—.

Dieser Überblick über die Geschichte der „spekulativen Logik“ des letzten Jahrhunderts gliedert sich in 6 Kapitel: 1. Logiker der hegelschen Schule (vor allem werden behandelt: J. E. Erdmann, Hanusch, Michelet, Rosenkranz, K. Fischer). 2. Logikarbeit im Sinne von Herbart und Fries (v. a. Drobisch und Apelt). 3. Logikarbeit im Sinne des spekulativen Theismus (Ritter, Weiße, L. George, Chalybaeus, Ulrici u. a.). 4. Letzte Versuche der Spekulation (v. a. Trendelenburg, Überweg, Rabus). 5. Lotze. 6. Propädeutische und Kompendienlogik der nachhegelschen Spekulation. Zur Bewältigung der umfangreichen Materie werden die einzelnen betrachteten Lehrgebäude in einer schematisierten — mitunter schlagwortartigen — Form umrissen. Die im Titel auftretende Apposition „als Kampf von Mensch, Ding und Wahrheit“ deutet darauf hin, daß es dem Verf. nicht um eine rein historische Darstellung, sondern um eine „Sichtung“ unter bestimmtem Gesichtspunkt zu tun ist: das dargestellte Stück der Geschichte der Logik wird als eine zweifache Abirrung (Mensch: Psychologismus, Ding: Empirismus) von der dem Verf. als Richtmaß dienenden „Ewigen Logik“ vorgetragen (in einem kurzen Absatz deutet der Autor an, wie er die „Ewige Logik“ verstanden wissen will); im Verfolg dieser Aufgabe münden nicht nur die Abschnitte jeweils in eine kritische Würdigung aus, sondern sind auch die Einzeldarstellungen auf das Ziel des Verf. abgestellt und meist recht kritisch gehalten. — Dem Hauptteil geht u. a. ein z. T. recht ausführliches (30 Seiten umfassendes) „Collegium logicum“ voran, in dem zusammengestellt ist, „was die Logiker des 19. Jahrhunderts etwa sich unter der traditionellen Logik vorgestellt haben.“

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Ajdukiewicz, Kazimierz: Die syntaktische Konnexität. *Studia Philos.* 1, 1—27 (1935).

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit gehören der logischen Syntax an; sie beschäftigen sich mit den Bedingungen, unter denen ein aus sinnvollen Einzelworten zusammengesetztes Wortgefüge einer Sprache syntaktisch konnex ist, d. h. „einen sinnvollen Ausdruck bildet, der selbst einen einheitlichen ... Sinn besitzt“. (Dies Problem ist verwandt mit der Frage nach den Formbestimmungen einer Sprache im Sinne von Carnaps „Logische Syntax der Sprache“, 1934.) Gestützt auf Untersuchungen von St. Lésniewski [Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. *Fundam. Math.* 14 (1929)] entwickelt der Verf. ein Bewertungsverfahren, das zu einem elementaren, rein formalen Kriterium für die syntaktische Konnexität eines vorgelegten Ausdrucks einer Sprache führt; dabei wird nur vorausgesetzt, daß für die betreffende Sprache eine Einteilung aller „Wörter“ (im Fall einer formalisierten Sprache: der unzerlegbaren selbständigen Zeichen wie 'p', '⊃', '~' usw. im Aussagenkalkül) in sog. Bedeutungskategorien — nach Art der logischen Typen — gegeben ist, und daß die Sprache nur zwei Kategorien von „Wörtern“ enthält, die nicht den Charakter von Funktoren (d. h. von ungesättigten Zeichen) haben, nämlich die Kategorien der Sätze und die der Namen. Das erwähnte Kriterium wird zunächst für operatorfreie Ausdrücke wie die des elementaren Aussagenkalküls entwickelt und dann auf operatorenhaltige Ausdrücke ausgedehnt; in diesem Zusammenhange wird ein Verfahren diskutiert, das es möglicherweise gestattet, alle Operatoren einer Sprache mit Hilfe eines einzigen Operators und geeignet gewählter Funktoren auszudrücken.

C. G. Hempel (Brüssel).

Perelman, Ch.: L'antinomie de M. Gödel. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 730 bis 736 (1936).

Unter der „Antinomie von Gödel“ versteht der Autor den von Gödel (vgl. dies. Zbl. 2, 1) bewiesenen Satz, nach dem in einem Formalismus mit gewissen Mindesteigenschaften (dessen beweisbare Formen inhaltlich richtig sind) eine bestimmte For-

mel \mathfrak{F} , die ihre eigene Unbeweisbarkeit ausdrückt ($\mathfrak{F} = \sim \text{Bew} \mathfrak{F}$), unentscheidbar ist. Aus der herausgegriffenen Eigenschaft des Formalismus und der angegebenen Gleichheit ergibt sich unmittelbar: 1. die Annahme, $\text{Bew} \sim \mathfrak{F}$ gelte, führt auf die Gültigkeit von $\text{Bew} \mathfrak{F}$; 2. die Annahme, $\text{Bew} \mathfrak{F}$ gelte, führt auf die Gültigkeit von $\sim \text{Bew} \mathfrak{F}$. Perelman versucht auch die Umkehrungen von 1. und 2. zu beweisen; im Falle 2 hätte man hiermit eine echte Paradoxie. Dem Beweisversuch unterläuft jedoch bei der Umkehrung von 1. der Schluß, daß bei definitorischer Gleichheit von $\text{Bew} \mathfrak{A}$ mit \mathfrak{B} aus der Annahme, $\text{Bew} \mathfrak{A}$ sei gültig, die Gültigkeit von $\text{Bew} \mathfrak{B}$ folge, und bei der Umkehrung von 2. ein Fehlschluß ähnlicher Art. *Arnold Schmidt.*

Helmer, Olaf: Perelman versus Gödel. *Mind* 46, 58—60 (1937).

Vgl. vorst. Referat u. dies. Zbl. 2, 1.

Rosser, Barkley: Extensions of some theorems of Gödel and Church. *J. Symbolic Logic* 1, 87—91 (1936).

The theorems extended are those of Gödel relating to the existence of indeterminate (unentscheidbar) propositions (this Zbl. 2, 1), and that of Church stating the non-existence of a recursive determination-process (Entscheidungsverfahren) in an ω -consistent system (this Zbl. 14, 98). The extensions are of two kinds. In the first place, the technique of general recursiveness as developed by Kleene (this Zbl. 14, 194) is applied to replace the requirement of primitive recursiveness in certain hypotheses of Gödel's theorems by that of general recursiveness. In the second place, by means of a revised definition of a numerical function corresponding to proveability, the results previously obtained for ω -consistent systems are derived, in essentially the same form, from the hypothesis of consistency in the ordinary sense. (For the author's abstract, see *J. Symbolic Logic* 1, 59 or *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 494.)

H. B. Curry (State College, Pa.).

Skolem, Th.: Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems. *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* 1936, 1—17 (Nr 6).

Verf. zeigt, daß man die Erfüllbarkeitsfrage für Zählausdrücke gewisser schon bekannter Normalformen zurückführen kann auf dieselbe Frage für andere Ausdrücke, worin der Kern nur ein einziges Funktionszeichen, und zwar ein zweistelliges, enthält, dagegen das Präfix etwas weitläufiger ist. Nach einigen vorläufigen Bemerkungen wird dieses Verfahren angewandt zunächst auf die Gödelsche Normalform (s. dies. Zbl. 8, 289), nämlich

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4) \dots (Ex_n) K(x_1, \dots, x_n),$$

wo der Kern K k ein- oder zweistellige Funktionszeichen enthält, und danach auf eine Ackermannsche Normalform (s. dies. Zbl. 13, 241). Im ersten Fall ist das Ergebnis ein Ausdruck, dessen Präfix der Reihenfolge nach aus $k+1$ Seinzeichen, sechs Allzeichen und $n^2 + n - 3$ Seinzeichen besteht; im zweiten Fall ist das Ergebnis komplizierter. Verf. weist auf ähnliche Resultate von Kalmár hin (Bericht des Züricher Kongresses, S. 337—338; vgl. auch dies. Zbl. 4, 146), und er gibt auch eine Vereinfachung eines Kalmárschen Beweises an. *H. B. Curry* (State College, Pa.).

Kalmár, László: Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen. *Compositio Math.* 4, 137—144 (1936).

Sei F die Klasse aller Zählausdrücke des engeren Funktionenkalküls. Man sucht möglichst einfache und kleine Unterklassen U dieser Klasse F heraus derart, daß es für jedes \mathfrak{A} aus F eine nach rein struktureller Vorschrift zu bildende Formel \mathfrak{B} in U gibt, so daß \mathfrak{A} und \mathfrak{B} entweder beide erfüllbar oder beide unerfüllbar sind. — In dieser Richtung liegt das Resultat der ref. Arbeit (eine Verschärfung der von Löwenheim [*Math. Ann.* 76, § 4 (1915)], Herbrand [dies. Zbl. 3, 290] und vom Verf. selbst [Verh. Intern. Congr. Zürich 2, 337 (1932)] erhaltenen Sätze): Als Klasse U wird die Klasse aller Formeln angenommen, welche eine einzige Funktionsvariable, nämlich eine binäre, enthalten und von der Form

$$(Ex_1)(Ex_2) \dots (Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez)(u_1)(u_2) \dots (u_n) \mathfrak{R}$$

(\mathfrak{R} enthält keine All- und Seinszeichen) sind. Der Beweis ist mengentheoretisch geführt, kann aber auch in einen finiten umgeformt werden; \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind entweder beide im Endlichen erfüllbar oder beide nicht. Eine weitere Spezialisierung der angeführten Form wurde von Ackermann (dies. Zbl. 13, 241) erreicht (y_2 beseitigt, $m = 1$), wie aber der Verf. bemerkt, verlangt sie eine größere Anzahl und Stellenzahl der Funktionsvariablen. (Anm. des Ref.: Die neuen unpublizierten Resultate von Pepis ausnützend, könnte man wahrscheinlich in der Kalmárschen Präfixform $m = 3$ feststellen, mit Beibehaltung einer einzigen, binären Funktionsvariable; vgl. auch Pepis [dies. Zbl. 14, 98].) *A. Lindenbaum* (Warszawa).

Church, Alonzo: Correction to a note on the Entscheidungsproblem. *J. Symbolic Logic* 1, 101—102 (1936).

The paper cited in the title (this Zbl. 14, 385) contained an error in that free variables were improperly allowed. In this paper the author corrects the error; he also discusses the constructive nature of his proof. *H. B. Curry.*

Péter, Rózsa: Über die mehrfache Rekursion. *Math. Ann.* 113, 489—527 (1936).

Eine Rekursion heißt k -fach, wenn sie gleichzeitig nach k Variablen fortschreitet. Z. B. ist die folgende eine einfache Rekursion:

$$\Phi(0, a) = \alpha(a), \quad \Phi(n + 1, a) = \beta(n, a, f(n, a)), \quad (1)$$

dagegen die folgende eine zweifache Rekursion:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0, n, a) &= 1, \quad \Phi(m + 1, 0, a) = 1, \\ \Phi(m + 1, n + 1, a) &= \alpha(m, n, \Phi(m, \beta(m, n, \Phi(m + 1, n)), \Phi(m + 1, n))). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Eine Funktion heißt k -rekursiv, wenn sie von den Ausgangsfunktionen 0 und $n + 1$, ausgehend durch eine endliche Kette von Substitutionen und (höchstens) k -fachen Rekursionen entsteht. In ihren früheren Arbeiten (dies. Zbl. 10, 241; 11, 3; 12, 2) hat die Verf. die einfachen Rekursionen untersucht und auch Beispiele von zweifachen Rekursionen betrachtet, die aus dem Gebiete der 1-rekursiven Funktionen hinausführen. In dieser Arbeit behandelt sie die mehrfachen Rekursionen systematisch. Ihre Hauptergebnisse sind die folgenden vier Sätze: 1. Jede mehrfache Rekursion kann auf eine gewisse Normalform zurückgeführt werden, welche für zweifache Rekursionen gerade das Schema (2) ist. 2. Eine mehrfache Rekursion ohne Einschachtelungen (d. h. Einsetzungen für die Parameter) läßt sich auf einfache Rekursionen zurückführen; also sind die Einschachtelungen nicht immer ausmerzbar. 3. Eine bestimmte, durch das Diagonalverfahren definierte $(k + 1)$ -rekursive Funktion ist nicht k -rekursiv, so daß eine $(k + 1)$ -fache Rekursion über die Grenze der k -rekursiven Funktionen hinausführen kann. 4. Jede k -rekursive Funktion kann dargestellt werden in der Form

$$\alpha(\mu_x(\beta(x, n_1, \dots, n_k) = 0)),$$

wo α und β 1-rekursiv sind und μ_x „die kleinste x , so daß“ bedeutet. Der letzte Satz ist Spezialfall eines Satzes von Kleene (dies. Zbl. 14, 194), aber der Beweis, der von Neumann stammt, ist wahrscheinlich früher entdeckt als der Kleenesche. *Curry.*

Zawirski, Zygmunt: Über das Verhältnis der mehrwertigen Logik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Studia Philos.* 1, 407—442 (1935).

Verf. erläutert und vergleicht die Systeme einer mehrwertigen Logik von Łukasiewicz, Post und Reichenbach, indem er ihr Verhältnis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzudecken sucht. Das System von Reichenbach ist unter dem Gesichtspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgestellt worden, scheint aber dem Verf. nicht zulässig, da die logischen Funktionen (Summe, Produkt, Implikation, Äquivalenz) von Aussagen nicht Funktionen der Wahrheitswerte dieser Aussagen allein sind, sondern auch von einer neuen Variablen, dem „Kopplungsgrad zweier Aussagen“, abhängen. Um dies zu vermeiden und das formale Schema von Łukasiewicz und Post aufrechtzuerhalten, definiert Verf. für das Produkt und die Summe mehrere logische Funktionen, die zum gleichen Zwecke wie der Kopplungsgrad eingeführt

werden. — Um einigen Einwänden von Reichenbach Rechnung zu tragen, hat Verf. in der „Ergänzung“ auch eine Vermehrung der Operatoren der Implikation und der Äquivalenz vorgenommen. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Born, Max: Some philosophical aspects of modern physics. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 57, 1—18 (1937).

Février, Paulette: Les relations d'incertitude de Heisenberg et la logique. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 481—483 (1937).

Algebra und Zahlentheorie.

Krawtchouk, M., et J. Grossberg: Sur l'équivalence des réseaux des formes bilinéaires. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. 2, Nr 2, 37—44 u. franz. Zusammenfassung 44 (1936) [Ukrainisch].

Une nouvelle démonstration, du théorème de Weierstrass est proposée concernant l'équivalence des réseaux non-singuliers des formes bilinéaires. On démontre en réduisant un réseau non-singulier de formes bilinéaires à la forme canonique de Weierstrass au moyen de transformations élémentaires de la matrice du réseau donné. — Il est démontré en outre, que chaque réseau non-singulier des formes bilinéaires au moyen de transformations élémentaires pourrait être développé en une série des formes bilinéaires d'un certain type spécial. *Autoreferat.*

Oldenburger, Rufus: On arithmetic invariants of binary cubic and binary trilinear forms. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 871—873 (1936).

Die bekannten 4 kanonischen Typen von binären Trilinearformen (vgl. dies. Zbl. 5, 97) können durch arithmetische Invarianten charakterisiert werden, von denen einer, der „Zerlegungsrang“ (factorisation rank) ε hier neu eingeführt wird. ε ist die Minimalzahl der Summanden in einer Darstellung der Trilinearform als Summe von Produkten von Linearformen. *van der Waerden* (Leipzig).

Palamà, G.: Su alcune formule dell'algebra delle successioni e sullo sviluppo di alcuni determinanti. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 6, 160—165 (1936).

Expansions are derived for a_n^{-1n} , a_n^{mn} , etc., and applied to certain determinants, like, for ex.,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

(which enters into the definition of a_n^{-1n}).

J. Shohat (Philadelphia).

Palamà, Giuseppe: Equazioni a radici in progressione aritmetica o geometrica d'ordine r . Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 15—20 (1936).

This Note deals with the algebraic equation

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i a_{i,n} x^{n-i} = 0 \quad (a_0, n = 1),$$

whose roots x_k form an arithmetical or geometrical series of order r , i. e.

$$x_k = \sum_{i=0}^r \binom{k-1}{i} d_i, \quad \text{or} \quad x_k = \prod_{i=0}^r q_i^{\binom{k-1}{i}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

The study of the roots in question is based upon the study of the general triangular array

$$a_{11}; a_{12}, a_{22}; \dots; a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n,n},$$

where, with certain given quantities p_1, p_2, \dots, p_{n-1} ,

$$a_{s,n} = a_{s-1,n-1} p_{n-1} + a_{s,n-1}.$$

Use is made of certain properties of the binomial coefficients.

J. Shohat.

Petterson, Erik L.: Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome. Uppsala: Diss. 1936. 96 S.

Diese Dissertation ist eine Zusammenfassung und Weiterführung mehrerer früherer Arbeiten des Verf. Sie enthält viele nach verschiedensten Gesichtspunkten gewonnene Irreduzibilitätskriterien von normierten ganzzahligen Polynomen einer Variablen und kann als ein eigenartiges Handbuch der Irreduzibilitätstheorie betrachtet werden. Sie besteht aus 8 Kapiteln. — In den Kap. I—II wird der Zusammenhang zwischen der Zerlegung eines normierten ganzzahligen Polynoms $f(x)$ und der Zerlegung von $f(0)$ und der Resultante $R(f, g)$ in Primfaktoren hergeleitet, wobei $g(x)$ ein anderes Polynom ist (vgl. dies. Zbl. 14, 51). Dieser Zusammenhang wird durch Einführung gewisser Exponenten der Zahlen $g(\xi_v)$, wobei $f(\xi_v) = 0$ ist, wesentlich verschärft. Daraus folgen einige Irreduzibilitätskriterien für Polynome der Gestalt $f(x) = F(g(x)) + E \cdot M(x)$ und einiger speziellerer Gestalten. — Kap. III ist den Polynomen vom Typ $f(x) = b \prod_v g_v(x)^{m_v} + p^e M(x)$ gewidmet. Als besondere Fälle ergeben sich die Resultate von Runge, A. Brauer und R. Brauer über Polynome vom Typ $\prod_v (x - a_v) + b$ (vgl. dies. Zbl. 14, 196). — Kap. IV ist einigen Verallgemeinerungen eines Kriteriums von T. Nagell gewidmet (vgl. dies. Zbl. 11, 388; 13, 386). — Im Kap. V benutzt der Verf. ein von O. Perron [J. reine angew. Math. 132, 288 (1907)] herrührendes Prinzip der Größenbeziehung von Wurzeln, um neue Kriterien herzuleiten. — Im Kap. VI wird der Beweis des folgenden Satzes gegeben: Es sei $f(x) = g(x)^n \cdot M(x) + N(x)$, wobei $N(x)$ zu $g(x) \cdot M(x)$ relativ prim, $N(x)$, $g(x)$, $M(x)$ fest und n veränderlich ist. Ist r_n der kleinste Gradzahl irreduzibler Faktoren von $f(x)$, die nicht Teiler von Polynomen der Form $g(x)^t - 1$ sind, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$. — Kap. VII enthält Verallgemeinerungen eines früheren Resultates des Verf. über die obere Grenze von E -Werten, bei welchen $F(x) + E \cdot M(x)$ reduzibel sein kann. — Im Kap. VIII werden die Resultate zweier früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 12, 99; 14, 289) zusammengestellt.
N. Tschebotaröw (Kasan).

Etherington, I. M. H.: Non-associate powers and a functional equation. Math. Gaz. 21, 36—39 (1937).

Die Anzahl der Bedeutungen von x^n in einer nichtkommutativen, nichtassoziativen Algebra ist $\frac{2(2n-3)!}{n!(n-2)!}$. Ist b_n die Anzahl der Bedeutungen von x^n in einer kommutativen, nichtassoziativen Algebra, so gilt für die erzeugende Funktion

$$f(x) = -1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

die Funktionalgleichung $f(x)^2 + f(x^2) + 2x = 0$,

deren stetige Lösungen geometrisch diskutiert werden.

van der Waerden.

Carbonaro, Carmela: $L'S_5$ rigato considerato come un S_2 ipercomplesso legato all'algebra complessa regolare d'ordine 4. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. 1, mem. 15, 1—27 (1936).

Ce Travail se rattache étroitement au Mémoire de N. Spampinato, Sulla geometria dello spazio rigato considerato come un S_1 ipercomplesso [R. Accad. Sci. fis. e mat., Napoli 20 (1935); ce Zbl. 12, 392]. L'auteur considère l' S_2 hypercomplexe lié à l'algèbre A des matrices carrées d'ordre 2 à éléments complexes [c. à. d. l'ensemble dont les éléments correspondent biunivoquement aux groupes (t_1, t_2, t_3) d'éléments

de A définis à un facteur près à droite et tels que la matrice $\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{vmatrix}$ soit de caractéristique — c. à. d. de rang — 2]: l'espace projectif complexe réglé S_5 peut être regardé comme un S_2 hypercomplexe; étude des transformations de coordonnées et des projectivités.
P. Dubreil (Nancy).

Calvo, Anna: $L'S_1$ ipercomplesso legato ad un'algebra del 4° ordine. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. 1, mem. 18, 1—11 (1936).

L'algèbre A en question est l'algèbre commutative du 4° ordre définie par le tableau de multiplication $u_i u_j = u_k$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$), $u_2^2 = u_3^2 = u_4$, $u_2 u_3 = u_2 u_4 = u_3 u_4 = u_4^2 = 0$. Les propriétés de l'espace hypercomplexe S_1 lié à A s'interprètent aisément dans l'espace projectif S_7 . P. Dubreil (Nancy).

Moufang, Ruth: Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper. J. reine angew. Math. 176, 203—223 (1937).

Es werden geordnete Schiefkörper konstruiert, die den Gruppenring \mathfrak{R}_m der allgemeinsten durch zwei Elemente a, b erzeugten metabelschen Gruppe \mathfrak{G} enthalten: Ist u der Kommutator von a, b und schreibt man $x u x^{-1} = u^x$, so läßt sich jedes Element von \mathfrak{G} auf die Form $u^\alpha a^\beta b^\gamma$ bringen, α, β ganz, γ ein Polynom in a, b, a^{-1}, b^{-1} mit ganzen Koeffizienten. Die Elemente von \mathfrak{R}_m haben also die Form $\sum r_{\nu n m} u^{\nu} a^n b^m$, $r_{\nu n m}$ rational. Die Multiplikationsregel in \mathfrak{R}_m ist

$$\left. \begin{aligned} & \sum r_{\nu n m} u^{\nu} a^n b^m \cdot \sum \varrho_{\mu k l} u^{\mu} a^k b^l \\ &= \sum r_{\nu n m} \varrho_{\mu k l} u^{\nu + \mu + a^n b^m \nu_{\mu} + a^n \frac{a^k - 1}{a - 1} \frac{b^m - 1}{b - 1} a^{n+k} b^{m+l}} \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Einen \mathfrak{R}_m umfassenden anordenbaren Schiefkörper \mathfrak{S}_m bilden die Laurentreihen $\sum_{k=M}^{\infty} \left(\sum_{i=N_k}^{\infty} R_{ik} a^i \right) b^k$ in b , deren Koeffizienten Laurentreihen in a sind; die R_{ik} sind rationale Funktionen der $u^{a^{\nu} b^{\mu}}$, ν, μ ganz. Die Multiplikationsvorschrift in \mathfrak{S}_m ergibt sich aus der Forderung, daß (*) im Teilring \mathfrak{R}_m gilt. — \mathfrak{S}_m ist von abzählbar vielen Parametern, nämlich den $u^{a^{\nu} b^{\mu}}$, a, b , über dem Zentrum abhängig. Durch Ersetzung der $u^{a^{\nu} b^{\mu}}$ durch geeignete Potenzreihen in x, y, z erhält man einen nur von 3 Parametern x, a, b über dem Zentrum (das aus den rationalen Funktionen von y, z besteht) abhängigen Schiefkörper, der auch \mathfrak{R}_m umfaßt. — Durch die Spezialisierung $u = 2$ ergibt sich aus \mathfrak{S}_m der Hilbertsche Schiefkörper (vgl. Grundlagen der Geometrie). $u = a$ gibt einen weiteren geordneten Schiefkörper, der einen zu dem von zwei Elementen erzeugten freien Ring isomorphen Teilring enthält. G. Köthe.

Poole, A. R.: Finite ova. Amer. J. Math. 59, 23—32 (1937).

Als endliches Ovum wird eine endliche Menge von Elementen bezeichnet, für die eine kommutative und assoziative Multiplikation erklärt ist. Es wird eine Anzahl elementarer Sätze abgeleitet, u. a. die folgenden: Jedes endliche Ovum enthält wenigstens ein Idempotent. Ein endliches Ovum ist eine Gruppe, wenn jedes Element a jedem Element b assoziiert ist, d. h. wenn es x, y gibt, so daß $ax = b$, $by = a$ gilt. Das Gegenstück zur Gruppe ist das reduzierte Ovum, in dem keine zwei Elemente assoziiert sind. Ein Ovum ist dann und nur dann reduziert, wenn es nur Idempotente und Elemente a mit $a^k = a^{k+1} = \dots$, von einem gewissen k ab, enthält. G. Köthe.

Zahlentheorie:

Moessner, Alfred: Numerische Identitäten. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 239 bis 244 (1936).

Chowla, S.: On a relation between two conjectures of the theory of numbers. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 4, 652—653 (1936).

Let $r_{k,k}(n)$ denote the number of representations of n as the sum of k k -th powers of integers ≥ 0 . We denote by A_s the unproved result ($k \geq 5$, $s \leq k - 3$) that $r_{k,k}(n) = O\left(n^{\frac{s}{k}}\right)$ and by B_s the conjecture that $\sum_{m=1}^{k-s} x_m^k = \sum_{m=1}^{k-s} y_m^k$ has a non-trivial solution in positive integers. Then, if A_s is false, B_s is true and if B_s is false, A_s is true. Wright (Aberdeen).

[Pillai, S. S.: On Waring's problem. III. J. Annamalai Univ. 6, 50—53 (1936).

[Pillai, S. S.: On Waring's problem. IV. J. Annamalai Univ. 6, 54—64 (1936).

These papers give the proofs of the important results due to the author and announced by S. Chowla (see this Zbl. 15, 4).

Wright (Aberdeen).

Ko, Chao: On a Waring's problem with squares of linear forms. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 171—185 (1936).

Let $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ (a, b, c integers) be a positive definite or a positive semi-definite form. Mordell has proved that 5 is the least value of n such that, for all admissible a, h, b , integers A_r, B_r exist for which

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^n (A_r x + B_r y)^2$$

identically in x, y . Let $\varepsilon_r = \pm 1$ be given and let $f(x, y)$ be a quadratic form not necessarily definite. The author proves that, if $n = 4$ and $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, then

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^n \varepsilon_r (A_r x + B_r y)^2 \quad (1)$$

is impossible for $a \equiv 2 \pmod{4}, h \equiv 1 \pmod{2}, b \equiv 2 \pmod{4}$ and possible for all other cases. He investigates necessary and sufficient conditions for the possibility of (1) when $n = 4, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \pm 1, \varepsilon_4 = \mp 1$, and deduces results for $n = 5$. Wright.

Dickson, L. E.: The Waring problem and its generalizations. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 833—842 (1936).

This paper is an account of recently published results due to the author and others. It also contains the announcement of the following new result: Let $q = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$, $I = 2^n + q - 2$, and $d = 1$ or 2 according as q is even or odd. If $9 \leq n \leq 400$, every positive integer is a sum of $4n + 2 - d$ integral n -th powers ≥ 0 and the doubles of $P = \frac{1}{2}(2^n + q - 4n + d) - 2$ such powers. Here $4n + 2 - d + 2P = I$. Expressed otherwise, in the ideal Waring Theorem we may take $2P$ of the powers equal in pairs.

Wright (Aberdeen).

James, R. D.: Note on formulas for the number of representations of an integer as a sum of $2h$ squares. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 863—866 (1936).

For $1 \leq h \leq 4$, the number of representations of an arbitrary integer n as a sum of $2h$ squares

$$N(n, 2h) = \lambda \sum (-1)^{\frac{1}{2}(hd-h)} d^{h-1}, \quad (A)$$

where λ may depend on the linear form of n and the summation is over all odd divisors d of n . The author finds a simple necessary condition for the truth of (1) for a given class of n with λ a constant. From this he deduces the fact that A cannot be true for all members of any of the following classes of n , if λ is independent of n : (1) $h \geq 5, n \equiv 1 \pmod{4}$, (2) $h = 3, 5, 7$ or $h \geq 8, n \equiv 2 \pmod{4}$, (3) $h = 5$ or $h \geq 7, n \equiv 2 \pmod{8}$.

Wright (Aberdeen).

Ricci, Giovanni: Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann. (I. mem.) Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 6, 71—90 (1937).

Introduction and Part I of a memoir of which an abstract has already appeared (this Zbl. 15, 201). The Introduction is substantially a reprint of the abstract. In Part I the main results are stated more fully, and deduced from a few general propositions. The proofs of these propositions are, however, reserved for Part III, which is to follow a systematic exposition of the author's refinement of the Viggo Brun method in Part II.

Ingham (Cambridge).

Kempner, A. J.: Anormal systems of numeration. Amer. Math. Monthly 43, 610 bis 617 (1936).

Für nichtganzes $a > 1$ studiert Verf. die Entwicklungen positiver Zahlen c zur Basis a :

$$c = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \dots + \alpha_0 a^0 + \alpha_{-1} a^{-1} + \alpha_{-2} a^{-2} + \dots \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \alpha_\nu < a; \\ \nu \leq n \end{array} \right)$$

und schreibt

$$c = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0 \cdot \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \quad (A).$$

Eine solche Entwicklung ist nicht eindeutig; jedes $c > 0$ besitzt aber eine und nur eine kanonische Entwicklung (1), mit

$$a^{n-1} \leq c < a^n; \quad c = \alpha_n a^n + \beta_n; \quad \beta_v = \alpha_{v-1} a^{v-1} + \beta_{v-1}; \quad 0 \leq \alpha_v < a, \\ 0 \leq \beta_v < a^v \quad (v = n, n-1, n-2, \dots)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Zahlfolge eine Entwicklung zur Basis a der Zahl c ist; notwendige bzw. hinreichende Bedingungen, damit eine Entwicklung (1) kanonisch ist; periodische Entwicklungen; Beispiele für $a = 3/2$, $a = \sqrt{5}$.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Analysis.

Roever, W. H.: A geometric representation of a line integral. *Amer. Math. Monthly* **44**, 22—24 (1937).

Bijl, J.: Zur Methode der stationären Phase. *Nieuw Arch. Wiskde* **19**, 63—85 (1936).

Die bisher nur selten zur asymptotischen Entwicklung benutzte Methode der stationären Phase wird vom Verf. unter Anwendung eines sinnreichen, von van der Corput herrührenden Kunstgriffes zu einer sehr brauchbaren Entwicklungsmethode gewisser Integrale von periodischen Funktionen ausgebildet. — Der Verf. skizziert diese Methode am Beispiel des Integrals

$$\int_0^\infty \sin(y^3 - 3x^2 y) dy, \quad (1)$$

wo x eine sehr große positive Zahl ist. Die Funktion $\varphi(y) = y^3 - 3x^2 y$, die Phase der Funktion $\sin(y^3 - 3x^2 y)$ hat im Punkte $y = x$ eine Derivierte = 0, oder die Phase ist im Punkte $y = x$ stationär. — Es zeigt sich aber, daß die Untersuchung des Integrals in der Umgebung des Punktes, wo die Phase stationär ist, nicht genügt. Die hieraus entstehende Schwierigkeit wird nach van der Corput beseitigt durch Einführung eines ganz neuen Elementes, einer Hilfsfunktion $H(u)$ (von van der Corput Neutralisator genannt: s. „Zur Methode der stationären Phase“, II. Mitt. dies. Zbl. **15**, 11), die im Intervall $1 \leq u \leq 2$ definiert, von x unabhängig ist und für die

$$H(1) = 1, \quad H(2) = 0, \quad H^k(1) = H^k(2) = 0 \quad (k \geq 1) \quad \left(\text{z. B. } H(u) = \frac{\int_u^2 \frac{1}{e^{v-2}} - \frac{1}{v-1} dv}{\int_1^2 \frac{1}{e^{v-2}} - \frac{1}{v-1} dv} \right).$$

Das Integral (1) wird unter Einführung des Neutralisators in 4 Teilintegrale zerlegt, die mit sehr großer Annäherung durch einfache Ausdrücke dargestellt werden können. Das Endergebnis ist:

$$\int_0^\infty \sin(y^3 - 3x^2 y) dy = \sum_{h=0}^{N-1} \frac{(-1)^{h+1} (3h)!}{h! (3x^2)^{3h+1}} + \sum_{h=0}^{M-1} \frac{\Gamma\left(3h + \frac{1}{2}\right) \sin\left\{-2x^3 + \frac{2h+1}{4}\pi\right\}}{(2h)! (3x)^{3h+\frac{1}{2}}} \\ + O\left(\frac{1}{x^{3M+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{6N+2}}\right).$$

M und N beliebig ganz > 0 . — Der Verf. gibt weiter die Besprechung mehrerer spezieller Resultate seiner bald erscheinenden Dissertation (Groningen 1937), hauptsächlich in bezug auf die Bessel-Schläflischen Integrale. *S. C. van Veen* (Dordrecht).

Popoviciu, Tiberiu: Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle. *Mathematica, Cluj* **12**, 5—12 (1936).

Let ω_1/ω_2 be irrational and

$$\sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} f(x + v \omega_\alpha) = 0, \quad (\alpha = 1, 2)$$

for all values of x . Then $f(x)$ is a polynomial of the degree $n - 1$ provided $f(x)$ is continuous. This theorem due to Montel [C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 586 (1935); this Zbl. **13**, 58] is generalized by the author; he shows the same assertion under the assumption that $f(x)$ is continuous only at n points. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Wintner, Aurel: A note on Lambert summability. *Mat. Tidsskr. B* **1936**, 94—95.

The author observes that whenever $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is analytic in $|z| < 1$ and at $z=1$ but $\max_{|z| \leq r < 1} |f(z)| \neq O(1-r)^{-k-1}$ for any k as $r \rightarrow 1-0$, $\sum a_n$ is summable (L) without being Cesàro summable of any order. *C. R. Adams* (Providence).

Montel, Paul: Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi. *Prace mat.-fiz.* **44**, 315—329 (1937).

Let $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ be periods of $f(z)$, z complex; then there always exist real numbers μ_i not all zero such that $\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \mu_3 \omega_3 = 0$. According as there exist between the μ_i no, one, or two distinct linear homogeneous relations with integral coefficients not all zero, the author calls the periods strictly independent, semi-dependent, or dependent. He shows that there exists no function $f(z)$ admitting 3 periods not dependent and being multiple-valued of finite order at any point. Let $\Delta_i^p f$ = the difference of p -th order of $f(z)$ with the increment ω_i . It is proved that the analytic solutions $f(z)$ of the system $\Delta_i^p f = 0$ ($i = 1, 2, 3$), wherein the increments form a period-system not dependent, are the polynomials of degree $p - 1$. For z real, analogous results are obtained, including a generalization of a theorem of Anghelutza (see this Zbl. **2**, 397). A similar study is made of $f(z, z')$, the results being not entirely parallel. *C. R. Adams* (Providence).

Duffahel, Maurice de: Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable. (Remarques se rapportant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité.) *Bull. Calcutta Math. Soc.* **28**, 229—234 (1936).

Ce mémoire est une mystification ou une imposture. A l'exception d'une note de référence (qui est supprimée, et pour cause), il reproduit textuellement le mémoire de M. Picard portant le même titre [*Rend. Circ. mat. Palermo* **33**, 254—258 (1912)]. *G. Valiron* (Paris).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Kowalewski, Gerhard: Einschließungssätze zur Berechnung von Integralen. *Deutsche Math.* **1**, 561—568 (1936).

The integral $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ is enclosed between bounds involving simple linear combinations of the functional values of $f(x)$ at certain prescribed points (trapezoidal and rectangular formula, Simson's formula, etc.). Thus, if $f''(x)$ has a constant sign in (α, β) , then I lies between

$$T = \sum \frac{b-a}{2} \{f(a) + f(b)\} \quad \text{and} \quad M = \sum (b-a) f(m), \quad m = \frac{b+a}{2},$$

where (α, β) is subdivided into a number of subintervals (a, b) . I also lies between T and

$$T^* = \sum \frac{b-a}{2} \{f(a^*) + f(b^*)\}, \quad a^* = a + \frac{b-a}{4}, \quad b^* = b - \frac{b-a}{4}.$$

If $f''(x)$ has a constant sign in (α, β) , then I lies between

$$S = \sum \frac{b-a}{6} \{f(a) + 4f(m) + f(b)\}$$

and

$$S^* = \sum \frac{b-a}{27} \left\{ 8f\left(\frac{7a+b}{8}\right) + 11f(m) + 8f\left(\frac{a+7b}{8}\right) \right\}.$$

In dealing with M , T the author uses the identity

$$\int_a^b (uv'' - vu'') dx = (uv' - vu') \Big|_a^b,$$

whence, for example,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \{f(a) + f(b)\} + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(m) + \frac{1}{2} \int_a^m (x-a)^2 f''(x) dx + \frac{1}{2} \int_m^b (x-b)^2 f''(x) dx.$$

In order to derive more general results, use is made of the integrated (from a to b) basic polynomials $L_n(x)$ entering into Lagrange interpolation formula. (Cf., Idem, this Zbl. 10, 18.) [The relation of the trapezoidal and Simpson's sums to the integral I is, of course, well known from the Calculus of Finite Differences. Ref.]

J. Shohat (Philadelphia).

Movchitz, S.: Une méthode de construction de sommes trigonométriques donnant l'approximation du meilleur ordre pour les fonctions possédant des propriétés différentielles déterminées. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. 2, Nr 2, 123—149 u. franz. Zusammenfassung 149—150 (1936) [Ukrainisch].

L'auteur étudie les conditions suffisantes pour qu'on ait

$$\left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq A_Y \frac{1}{n^Y} \omega\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

où $f(x)$ est une fonction périodique, a_k et b_k ses coefficients de Fourier, dont la dérivée d'ordre $Y = 2s$ ou $Y = 2s + 1$ admet le module de continuité $\omega(\delta)$. Il montre qu'il suffit que $\varphi(x)$ soit une fonction paire, admettant dans l'intervalle $(-1, +1)$ une dérivée d'ordre $N > Y + 2$ sommable, et telle que $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = \varphi'(1) = \dots = \varphi^{(N-1)}(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi^{(IV)}(0) = \dots = \varphi^{(2s)}(0) = 0$, où $s = \left[\frac{N-4}{2} \right]$, et examine quelques cas particuliers.

S. Bernstein (Leningrad).

Walsh, J. L.: The divergence of sequences of polynomials interpolating in roots of unity. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 715—719 (1936).

Let $R > 1$ be the largest number such that $f(z)$ is regular in $|z| < R$. Let $p_n(z)$ be the interpolation polynomial of degree n coinciding with $f(z)$ at the $(n+1)$ -st roots of unity. The author shows in a very elementary way the divergence of the sequence $\{p_n(z)\}$ everywhere exterior to $|z| = R$.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Szegő, Gabriel: On some Hermitian forms associated with two given curves of the complex plane. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 450—461 (1936).

The paper deals with finding the asymptotic value, as $n \rightarrow \infty$, for the smallest characteristic number λ_n of the quadratic form

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt = \sum_{\mu, \nu=0}^n \frac{x_\mu x_\nu}{\mu + \nu + 1}, \quad (\mu + \nu = \text{even integer}).$$

This problem is closely related to the following one. Let $f(z)$ belong to the set of polynomials of degree n such that $\left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq 1$. What can be said of $M_n = \max. \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}}$? (We have $\lambda_n = M_n^{-2}$). The author shows that

$$\lambda_n \cdot 2^{-9/4} \pi^{-3/4} n^{-1/4} (2\frac{1}{2} - 1)^{-2n-3} \rightarrow 1, \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

The proof is based upon the following extremal property of λ_n :

$$\lambda_n = \min \frac{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(x) dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi}, \quad (2)$$

where $f(z)$ denotes an arbitrary polynomial of degree n , with real coefficients. By properly specifying $f(z)$ in (2) and making use of the asymptotic expression for Legendre polynomials, we obtain (1). In a similar manner we obtain the asymptotic value of λ_n for the quadratic forms

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-t} (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt. \quad (3)$$

Here use is made of Perron's asymptotic expression for Laguerre polynomials, to which Hermite polynomials [entering into the first form in (3)] are closely related.

J. Shohat (Philadelphia).

Obrechhoff, Nikola: Formules asymptotiques pour les polynômes de Jacobi et sur les séries suivant les mêmes polynômes. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 32, 39—135 u. franz. Zusammenfassung 128—133 (1936) [Bulgarisch].

The main object of this paper is to derive asymptotic expressions ($n \rightarrow \infty$) for Jacobi polynomials $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\alpha, \beta > -1$ (with the orthogonality interval $(-1, 1)$) which hold uniformly for $-1 < x < 1$ (and not only in the fixed interval $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, like the classical expressions of Darboux). — The method employed is based upon the generating function which yields:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{2\pi i} \int_C t^{n+\alpha+\beta} (t-1+\Delta)^{-\alpha} (t+1+\Delta)^{-\beta} dt.$$

Here $\Delta = 1 - 2xt + t^2$, $x = \cos \varphi$ and the contour C is properly chosen. A straightforward asymptotic estimate of this contour-integral (requiring a study of the function $\varphi(\omega) = 2(\omega-1)^{-\alpha}(\omega+1)^{-\beta}$, $\omega = e^{i\varphi}$) yields the desired asymptotic expression for $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, first, when $-1 \leq \alpha, \beta \leq 0$. The result is then extended to all $\alpha, \beta > -1$ by expressing $(x-1)P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x)$ as a linear combination of $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)$, and more generally, $(x-1)^{\kappa} P_n^{(\alpha+\kappa, \beta)}(x)$ as a linear combination of the differences $\Delta^i P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. The method is then applied, to derive an asymptotic formula for the symmetric (ultraspherical) polynomial $P_n^{(\lambda)}(x)$, $\lambda > 0$, containing as many terms, as we please. Various applications follow, like bounds for $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ in the interval $(-1 + \lambda/n^2, 1 - \lambda/n^2)$, $\lambda > 0$ arbitrarily fixed (even in the interval $(-1 < x < 1)$, for certain special values of α, β). The most interesting application is to finding the asymptotic values of the Lebesgue constants $\varrho_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\kappa \geq 0$. Thus,

$$\varrho_{n, 0}^{(\alpha, \beta)}(x) \sim \frac{4}{\pi^2} \log n; \quad \varrho_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(x) = O(1), \kappa > 0 \quad (-1 < x < 1; \alpha, \beta > -1).$$

This, in turn, yields general results concerning convergence and (C, k) summability of series proceeding according to Jacobi polynomials, extending similar results previously established by Kogbetliantz, Szegő and others. [The Referee wishes to make the following remarks. 1°. The formula for $\Delta^i(u_{\kappa} v_n)$ is an old result in the Calculus of Finite Differences (Cf., e. g., Markoffs book, in Russian, 1910). 2°. The above expression for $(x-1)P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x)$ is a special case of a general formula derived in my Mémorial Monograph (p. 28). 3°. Mention should have been made of the results of Szegő (Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome, Schr. Königsb. Gel.-Ges., 1933, this Zbl. 7, 203). It must be added that the method and results of Obrechhoff — employing ordinary trigonometric functions (in place of Bessel Functions) — is simpler than those of Szegő].

J. Shohat (Philadelphia).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Latycheva, K.: Solution d'après la méthode des moments de certaines équations différentielles avec des points réguliers. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. 2, Nr 2, 109—116 u. franz. Zusammenfassung 117 (1936) [Ukrainisch].

Application de la méthode de Krawtchouk et l'aut. (voir ce Zbl. 14, 306, aussi pour les notations) à l'équation déjà considérée par l'aut. (ibid., 2), en réduisant cette

fois l'opérateur $L[y]$ à la forme $L_1[y] \equiv (b-x)y'' + a_1(x)y' + \frac{a_2(x)y}{b-x}$ ($f(x)$ est supposée divisible par $b-x$, a_1, a_2 sont holomorphes pour $x=b$). *W. Stepanoff.*

Robinson, L. B.: Complément à une étude sur l'équation fonctionnelle d'Ozumi. Bull. Soc. Math. France **64**, 213—215 (1936).

Complément à un mémoire antérieur (voir ce Zbl. **15**, 31). Examen des solutions de

$$u'(x) = a(x) u\left(x^{\frac{m}{n}}\right) + b(x)$$

où m et n sont entiers positifs, $m > n$, et $a(x)$ une fonction entière à coefficients positifs. Considérations sur les solutions singulières. *G. Valiron (Paris).*

Pfeiffer, G.: Des propriétés d'une matrice. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. **2**, Nr 2, 99—101 u. franz. Zusammenfassung 101 (1936) [Ukrainisch].

Généralisation d'un théorème de Forsyth (Theory of differential equations **5**, 178).

Janczewski (Leningrad).

Hadamard, J.: Problème topologique sur les équations différentielles. Prace mat.-fiz. **44**, 1—7 (1937).

The author suggests a new topological theory of a system of ordinary differential equations

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} = dt. \quad (1)$$

Let $X(g) = X_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial g}{\partial x_n}$, $g(x_1, \dots, x_n)$ satisfying suitable regularity conditions. "In general" $X(g) = 0$ is a certain hypersurface S_0 in $x_1 \dots x_n$ -space; adding successively the equations $XX(g) = 0$, $XXX(g) = 0$, etc. we obtain a sequence of $n-1$ manifolds S_1, S_2, \dots on S_0 , S_i being of dimension $n-i-1$ and containing S_{i+1} . S_0 is divided by S_1 into a positive part, where $XX(g) > 0$ and a negative part where $XX(g) < 0$. Correspondingly S_1 is divided by S_2 into a positive and a negative part according to the sign of $XXX(g)$, etc. If g is considered as a function of t along a curve-solution of (1), g is stationary where the trajectory intersects S_0 ; the stationary value will be a maximum (minimum), if the point of intersection is on the negative (positive) part of S_0 or of S_2 or of S_4 , etc.; a point of inflection, if the point of intersection is on S_1 but not on S_2 , or on S_3 but not on S_4 , etc. If the trajectory has only a finite number of intersections with S_0 , g is monotonic from a certain t onwards; if then g and a number of its derivatives are bounded, the trajectory approaches a point or line on a surface $g = \text{const}$, which lies at the same time on one of the S_i . — By specializing g certain results of Poincaré (Oeuvres **1**, 8—10) concerning the intersections of any trajectory with a given algebraic cycle, can be obtained from this principle. As the topological character of the system formed by S_0, S_1, S_2, \dots seems to be of importance for the behaviour of the solutions of (1), the author proposes to study it with the help of the methods applied by Morse (Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 345 and **33**, 72; this Zbl. **1**, 331) and others to the study of the level surfaces of a function of n variables.

F. John (Lexington, Ky.).

Kamke, E.: Über die partielle Differentialgleichung $f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y)$. II. Math. Z. **42**, 287—300 (1937).

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **13**, 264). Es seien zwei Differentialgleichungen gegeben:

$$f_v(x, y) \frac{\partial z_v}{\partial x} + g_v(x, y) \frac{\partial z_v}{\partial y} = h_v(x, y), \quad v = 1, 2;$$

f_v, g_v, h_v gehören im einfach-zusammenhängenden Gebiet \mathfrak{G} der x, y -Ebene zur Klasse D_k , $k \geq 1$ (d. h. sie besitzen stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k), und überall in \mathfrak{G} ist $f_1 g_2 - f_2 g_1 \neq 0$. Dann existieren in jedem beschränkten Gebiet g , $g \subset \mathfrak{G}$, Integrale der Klasse D_k der beiden Gleichungen; im homogenen Fall $h_1 \equiv h_2 \equiv 0$ gibt es in g Integrale $z_1 = U$, $z_2 = V$, so daß $U_x V_y - U_y V_x > 0$ ausfällt und g eindeutig auf ein Gebiet der U, V -Ebene abgebildet wird. — Zwei

wichtige Anwendungen: 1. Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine Fläche im dreidimensionalen Euklidischen Raum, die das Bild eines einfach-zusammenhängenden u^1, u^2 -Gebietes \mathfrak{G} ist und keine Singularitäten (einschließlich Flach- und Nabelpunkte) besitzt, $\mathfrak{x} \in D_4$; dann läßt dieselbe in jedem Gebiet \mathfrak{g} eine Darstellung mit Krümmungslinien als Parameterlinien zu. 2. Der Differentialausdruck

$$a(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

wobei a, b, c im einfach-zusammenhängenden \mathfrak{G} definiert sind und zu D_{k+2} gehören, $k \geq 0$, f für $x, y \in \mathfrak{g}$ und die zugehörigen Werte einer Funktion $z \in D_{k+2}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ definiert ist, kann mittels einer eindeutigen Transformation im ganzen \mathfrak{g} auf eine Normalform gebracht werden, nämlich im hyperbolischen Fall $b^2 - 4ac > 0$ auf die Form $B(\xi, \eta) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - f - D(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - E(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta}$, $B \neq 0$, und im parabolischen Fall $b^2 - 4ac = 0$, $|a| + |c| > 0$, auf die Form $C(\xi, \eta) \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - f - D \frac{\partial z}{\partial \xi} - E \frac{\partial z}{\partial \eta}$, $C \neq 0$; $B, C, D, E \in D_k$; ξ, η bilden \mathfrak{g} eindeutig auf ein Gebiet \mathfrak{h} ab. *W. Stepanoff.*

Drinfeld, G.: Sur une représentation de la forme symbolique différentielle. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. 2, Nr 2, 97—98 u. franz. Zusammenfassung 98 (1936) [Ukrainisch].

Conditions suffisantes pour qu'une forme symbolique différentielle Ω_p n'ait pas de diviseurs linéaires et pour que $[\Omega_p]^h$ soit $\equiv 0$. *Janczewski* (Leningrad).

Drinfeld, G.: La structure de certains types d'invariants intégraux. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. 2, Nr 2, 103—108 u. franz. Zusammenfassung 108 (1936) [Ukrainisch].

Suite des travaux précédents (ce Zbl. 13, 352, 402). Quelques théorèmes supplémentaires sur la structure des invariants intégraux de premier ordre. *Janczewski.*

Hadamard, J.: Équations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique. (Conférences internat. sur les équations aux dérivées partielles, Genève, 17.—20. VI. 1935.) Enseignement Math. 35, 5—42 (1936).

Die entscheidende Frage in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist die nach den angemessenen Bedingungen, die eindeutige Existenz der Lösung garantieren. Diese Fragestellung wird in historischer und sachlicher Hinsicht von Grund auf entwickelt und in reichhaltiger Übersicht dargestellt. Die Probleme werden vorwiegend im Falle hyperbolischer Differentialgleichungen besprochen. Doch werden auch gemischte Differentialgleichungen und anormale Vorgaben an Hand neuer Arbeiten eingehend behandelt. *K. Friedrichs* (Braunschweig).

Siddiqi, Raziuddin: Sur la théorie des équations non linéaires aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 1120—1122 (1936).

In Weiterführung früherer Arbeiten [Math. Z. 35, 464 (1932), dies. Zbl. 4, 256, und 40, 484 (1935), dies. Zbl. 12, 299] wird das Problem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{r,s=1}^{\infty} p_{rs}(x, t) u^r \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^s$$

mit den gemischten Bedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$ behandelt.

Rellich (Marburg, Lahn).

Mangeron, Déméter: Sur certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 94—96 (1937).

Das Problem, eine auf dem Rand des Rechtecks $a \leq x \leq c$, $b \leq y \leq d$ samt ihrer Normalableitung verschwindende Lösung $u(x, y)$ von

$$\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} - \lambda A(x, y) u(x, y) = f(x, y)$$

zu finden, wird auf die Auflösung einer Fredholmschen Integralgleichung mit symmetrisierbarem Kern zurückgeführt. *G. Cimmino* (Napoli).

Chaundy, T. W.: Hypergeometric partial differential equations. II. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 306—315 (1936).

Verf. ermittelt die Grundlösung der von ihm bereits in der I. Mitt. (dies. Zbl. 13, 18) untersuchten partiellen Differentialgleichung in Form eines Linienintegrals und vergleicht dieses mit der früher gegebenen Reihendarstellung. Am Beispiel der Eulerschen Differentialgleichung

$$\delta \delta' V(x, y) = xy(\delta - m)(\delta' - n)V(x, y) \quad \left(\delta, \delta' \equiv x \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

wird die Übereinstimmung mit der Lösung Darboux' (Théorie gén. d. surfaces II, 83) gezeigt. v. Koppenfels (Hannover).

Slouguinoff, S. P.: Équation de Laplace dans l'espace à deux dimensions. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 89—106 (1936).

Weinstein, A.: Les conditions aux limites introduites par l'hydrodynamique. (Conférences internat. sur les équations aux dérivées partielles, Genève, 17.—20. VI. 1935.) Enseignement Math. 35, 107—125 (1936).

Der Bericht befaßt sich vorwiegend mit dem Helmholtz'schen Problem der ebenen Potentialströmungen mit freien Grenzen. Es werden die verschiedenen Ansätze zum Eindeutigkeitsbeweise besprochen und sodann die vom Verf. und Leray (vgl. dies. Zbl. 9, 20) gegebenen Existenzbeweise. K. Friedrichs (Braunschweig).

Spezielle Funktionen:

Hille, Einar, and Otto Szász: On the completeness of Lambert functions. II. Ann. of Math., II. s. 37, 801—815 (1936).

Using essentially the same line of argument as in the I. part (Bull. Amer. Math. Soc. 42, 411; this Zbl. 14, 405) the authors prove the completeness of the system

$$\varphi(t) \sum_{m=1}^{\infty} m^{\beta} t^{m\lambda_n}$$

in $L_1(0, 1)$ provided that $\Re \lambda_n \geq \delta > 0$, $\sum \Re(1/\lambda_n) = +\infty$. Here $\varphi(t)$ is measurable and almost everywhere $\neq 0$, $t^{\alpha} \varphi(t) \in L_1(0, 1)$, $\alpha > 0$ arbitrary, and

$$\gamma = \liminf_{x \rightarrow \infty} \left[(\log x)^{-1} \log \left\{ \int_0^1 t^x |\varphi(t)| dt \right\}^{-1} \right] > \beta + 1.$$

The basic idea is again the application of Möbius' inversion formula. By replacing m^{β} by a sequence $\{a_m\}$ with $|a_m| \leq B m^{\beta}$ ($m = 2, 3, \dots; a_1 = 1$) the statement remains true provided $\gamma > \beta + \varrho(B)$ where $\varrho(B)$ is the positive root of the equation $\zeta(s) = 1 + B^{-1}$. Several further generalizations as well as completeness in $C(0, 1)$ are also considered. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur les fonctions génératrices des polynômes d'Hermite. Mathematica, Cluj 12, 180—184 (1936).

The only generating function of Hermite functions

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c_n (e^{-\frac{1}{2}x^2})^{(n)}$$

which has the form $\xi(\alpha) \exp\{\eta(\alpha)x + \zeta(\alpha)x^2\}$ is given by Mehler's formula

$$(1 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{2\alpha s x - s^2 - x^2}{2(1 - \alpha^2)} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (e^{-\frac{1}{2}s^2})^{(n)} (e^{-\frac{1}{2}x^2})^{(n)}.$$

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Varma, R. S.: An infinite integral involving Bessel function and parabolic cylinder function. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 209—211 (1936).

The object of this note is to evaluate the integral

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-px + \frac{1}{2}x^2} D_{-m}(x) J_{\nu}(xa) dx.$$

It is shown that this integral is equal to

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} \frac{p^{m-n-\nu-1}}{\Gamma(m)\Gamma(\nu+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}p^2)^r}{r!} \Gamma(n+\nu-2r-m+1) \\ \times {}_2F_1\left[\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\nu-r-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\nu-r-\frac{1}{2}m+1; \quad -\frac{a^2}{p^2}\right]_{\nu+1}$$

when $R(m) > 0$, $R(n) > -1$ and $m-n-\nu$ is not an integer. — There is a simplification when $a = ip$ and $m-n-\nu$ is of the form $2l + \frac{1}{2}$, where l is an integer. *Bailey*.

Wang, Fu Traing: A remark on the mean value theorem of Riemann's zeta-function. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. 25, 381—391 (1936).

If $R(T)$ is the remainder in the formula

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = T\zeta(2\sigma) + (2\pi)^{2\sigma-1} \frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma} T^{2-2\sigma} + R(T),$$

it is shown that $R(T) = O(T^{1-\sigma})$. The method is that of Titchmarsh, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 3, 133—141 (1932) (this Zbl. 5, 53). *E. C. Titchmarsh* (Oxford).

Wang, Fu Traing: On the mean value theorem of Riemann's zeta-function. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. 25, 392—414 (1936).

With the notation of the previous reference it is proved that $R(T) = O(T^{\frac{1}{2}(1-\sigma)})$. The method is that of Titchmarsh, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 5, 195—210 (1934) (this Zbl. 10, 10). *E. C. Titchmarsh* (Oxford).

Conforto, F.: Uno sviluppo in prodotto infinito per funzioni automorfe. *Rend. Semin. mat. Roma*, III. s. 2, 9—31 (1936).

Verf. leitet für die automorphen Funktionen, die zu einer Fuchsschen Gruppe der Signatur $(p, 0)$ gehören, eine Darstellung als unendliches Produkt her, das in jeder regulären Stelle konvergiert und die Nullstellen und Pole ersichtlich macht. Sind a_1, \dots, a_n die Nullstellen und b_1, \dots, b_n die Pole im Fundamentalbereich, so

läßt sich die automorphe Funktion in der Form $c \cdot \prod_{i=1}^n P(z, a_i) / \prod_{i=1}^n P(z, b_i)$ schreiben.

Dabei bedeutet $P(z, a)$ eine „primitive Form“ und entspricht etwa der Weierstraßschen σ -Funktion in der Theorie der elliptischen Funktionen. Es verschwindet im Punkt $z = a$ und seinen Transformaten und hat sonst nur von a unabhängige Nullstellen und Pole. Klein definiert $P(z, a)$ mit Hilfe eines Integrals 3. Gattung auf der zur Gruppe gehörigen Riemannschen Fläche (Vorl. ü. d. Th. d. elliptischen Modul-funktionen Bd. 2, S. 475ff.). Für dieses Integral leitet Verf. nach einer Methode von Stahl (*Math. Ann.* 33, 291—309) eine Partialbruchentwicklung ab, aus der er dann das unendliche Produkt für $P(z, a)$ gewinnt. *G. Lochs* (Kennelbach).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Iglisch, Rudolf: Über eine von Herrn Romanovsky betrachtete Integralgleichung. *Acta math.* 67, 329—335 (1936).

Verf. beweist die determinantenfreien Sätze für die von Romanovsky (dies. Zbl. 4, 397) behandelte Integralgleichung $w(x, y) - \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y) w(t, x) dt = f(x, y)$, indem er bemerkt, daß zwischen den Lösungen der homogenen Gleichung und den Lösungen der gewöhnlichen Integralgleichungen $w(x, y) - \lambda^n \int_s \int_g \varphi^{(n)}(x, y; s, t) w(s, t) ds dt = 0$, wobei

$\varphi^{(n)}(x, y; s, t) = s_{n-2} \dots \int \varphi(t_1, x, y) \varphi(t_2, t_1, x) \varphi(t_3, t_2, t_1) \dots \varphi(s, t, t_{n-2}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2}$ die üblichen Verbindungen bestehen. Ferner wird die von Romanovsky bemerkte Zurückführung der Lösung der inhomogenen Gleichung auf eine gewöhnliche Gleichung mit $\varphi^{(2)}$ als Kern benutzt. *T. H. Hildebrandt* (Ann Arbor).

Latycheva, K.: Sur une inégalité de D. Panov. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. 2, Nr 2, 119—122 u. franz. Zusammenfassung 122 (1936) [Ukrainisch].

Dans son travail cité ce Zbl. 11, 26 Panov a démontré le théorème suivant: soit

$$L[\varphi(x)] \equiv \varphi(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0.$$

Si l'on peut construire deux fonctions $\Phi_1(x)$ et $\varphi_1(x)$ avec $L[\Phi_1] > 0 > L[\varphi_1]$ dans un certain intervalle des valeurs de x et pour chaque $\lambda > 0$ distinct des nombres caractéristiques, — on aura aussi $\Phi_1(x) > \varphi(x) > \varphi_1(x)$. L'auteur généralise ce théorème pour le cas $\lambda < 0$.

Janczewski (Leningrad).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Sui sistemi di equazioni integrali non lineari. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 7, 1—35 (1936).

Übertragung einiger Ausführungen der letzten Jahre, welche sich mit der Lösbarkeit nichtlinearer Integralgleichungen unter Heranziehung einer abstrakten Formulierung des S. Bernstein-Hadamardschen Fortsetzungsprinzipes beschäftigen, auf Systeme der Form

$$\varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) f_i[y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)] dy = g_i(x) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

(K_i positiv und semidefinit, die Form $\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} \xi_i \xi_k$ definit positiv). Das Prinzip, welches

bekanntlich nach S. Bernstein in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen fortwährend von allen Verfassern und vielfach auch in der Hydromechanik, Differentialgeometrie, Funktionentheorie usw. verwendet wird, beruht auf folgenden zwei Momenten: a) den sog. „a priori“-Abschätzungen, b) dem Nachweis für die eindeutige Lösbarkeit „im Kleinen“. Es werden nun vom Verf. Kriterien für a) und b) im Falle der Gleichungen (1) sowie eine Anwendung auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen (erste Randwertaufgabe) angegeben.

Schauder (Lwów).

Funktionalanalysis:

● **Davis, Harold T.:** The theory of linear operators, from the standpoint of differential equations of infinite order. (Monogr. of the Waterman inst. of Indiana univ., contrib. Nr. 72.) Bloomington, Indiana: Principia press 1936. XIV, 628 pag. bound \$ 8.—.

The recent tendency in the theory of linear operators (transformations or operations) has been in the direction of generality, i.e. the assumption of a domain space and of a range space, and an operation or transformation on the domain space to the range space, each gifted postulationally with sufficient properties to guarantee the possibility of developing an adequate general theory. The volume under review exhibits a contrary tendency, suggested by the pleasure which the inventors of the calculus found in the formal application of the derivative operation. The kingpin in the present exposition is the derivative operator d/dx , denoted for convenience by the letter z , together with its iterations: z^n , their linear combination and generalization. The domain on which such operations are effective is not always clearly defined, but apparently may be taken as the set of functions of one real variable (range doubtful) having derivatives of all orders, or analytic functions of the complex variable. The range or class resulting from these operators is similarly defined. The result of this lack of precision is that the addition of the word "formal" enables one to treat matters of validity, convergence and other disturbances imposed by modern mathematics, lightly, and secure the air of mystery which has pervaded the subject of operators of this type since its inception. The aim of the author is to present as many of the operations of analysis in the form of an operation symbolically represented $F(x, d/dx) = F(x, z)$ as possible, to develop a theory of inversion of such operators, and apply them to functional equations, particularly differential equations of infinite order. A reason suggested for preferring the derivative operator to the integral operator is that the derivative is local, while the integral depends on the whole range. Under this program the simple substitution $f(a)$ appears with the aid of Taylor's expansion as the operation of infinite order $e^{(a-x)z} \rightarrow f(x)$, in virtue of which the term $\int K(x, y) u(y) dy$ familiar from integral equations becomes $\int K(x, y) e^{(y-x)z} dy \rightarrow u(x)$. The same expansion of a function suggests the differential operator equivalents of $\sum_{n=0}^m \varphi_n(x) u(x + n\omega)$ and more generally

$\sum_{n=0}^m \varphi_n(x) u(q_n x)$. By setting $z^{-n} \rightarrow u(x) = \int_c^x (x-t)^{n-1} u(t) dt / (n-1)!$ and expanding $K(x, y)$ in a power series in $(x-y)$ with coefficients functions of x , another operational function for $\int K(x, y) u(y) dy$ proceeding according to negative powers of z can be obtained. In so far as this process transforms functional equations into differential equations of infinite order, the main portion of the book is given over to the presentation of results, formal, heuristic and definitive concerning the solutions of such equations. — After an elaborate introduction, covering the historical development of the theory of differential operators, replete with references and allusions, the foundation for the task is laid in extending the notion of the differential operator $z = d/dx$ from z^n with positive integral exponents to negative and fractional exponents, as well as to an interpretation of the notion $\log z$, and its integral powers. For negative exponents, the operation $z^{-n} f(x)$ is that solution of the differential equation $y^{(n)} = f(x)$ which satisfies the initial conditions $y^{(i)}(c) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. For non-integral exponents ν , the approaches of Abel and Riemann to this problem suggest the following definition

$$z^\nu \rightarrow u(x) = {}_c D_x^\nu u(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x-t)^{n-\nu-1} u(t) dt / \Gamma(n-\nu),$$

where n is the smallest non-negative integer greater than ν . — The operation $\log z$ is obtained by formal differentiation of this result with respect to the exponent ν . The possibility of utilizing the Fourier formula, and Laplace transformation in this situation are indicated. Additional foundational material includes a chapter on systems of linear algebraic equations in infinitely many variables with particular emphasis on those portions where infinite determinants or the method of segments is applicable, the usefulness of these results being indicated in the possibility of obtaining an infinite system of equations from a differential equation of infinite order by repeated differentiation. — Since most of the precise results on differential equations center in the notion of grade of an entire function, viz. $\limsup |f^{(n)}(x)|^{1/n}$,

which is independent of x for entire functions, the properties of grades of functions on application of derivative operations yield that $F(z)$ operating on a function $f(x)$ of grade q is again a function of grade q if $F(z)$ has a Laurent expression in z with constant coefficients containing $z = q$ or is of the form $e^{-zz} \int_0^z e^{zt} Y(t) dt$, if $Y(t)$ is analytic for $t < R > q$. The notion of grade is suggested also for an arbitrary operation S , but in order to make it effective as a constant the functional value at a given point should be replaced by a norm (e.g. maximum of absolute values) on the range of functional values. — Further since interest centers in the Bourlet point of view the Bourlet formula for the composition of two operations $F(x, z) \rightarrow G(x, z)$ viz.

$$[F \cdot G] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n G}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n F}{\partial z^n} / n!$$

is demonstrated formally for F and G each both power series in positive powers of z , or both in negative powers of z , or these combinations, each function multiplied by terms of the form $z^{-\nu} \log^n z$. The question of inversion of an operator is then made to depend upon the possibility of finding for a given $F(x, z)$ an $X(x, z)$ satisfying the relation $[X(x, z) \cdot F(x, z)] = 1$ and it is asserted that it is then obvious that a solution of the equation $F(x, z) \rightarrow u(x) = f(x)$ has the form $u(x) = X(x, z) \rightarrow f(x)$, which may be true when F does not depend on x , but is subject to proof when F depends on x and the operators X and F are not necessarily commutative. For linear differential equations of infinite order with constant coefficients, this inversion relation leads to a discussion of the form of solution for the cases where the inverse function $G(z)$ of $F(z)$ has a finite number of poles in an annulus around the origin, the results being applied particularly to the formal solution of linear differential equations of finite order. Non-formal is the beautiful theorem of Ritt on such equations, which connects up with the theory of Dirichlet series. — The chapter on infinite systems of differential equations with constant coefficients is devoted in the main to an exposition of the Heaviside theory of operators, and its modifications by Bromwich and Carson, i.e. to finite systems; infinite systems receive scant attention, via a resumé of results on such systems obtained by I. M. Sheffer. — In the treatment of the Laplace differential equation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p (a_{nm} x^m) u^{(n)}(x) = F(x)$$

the search for the inverse $X(x, z)$ of $F(x, z)$ in the sense $[X \cdot F] = 1$ yields via the assumption $X(x, z) = e^{-xz} X(z)$ a differential equation of finite order for $X(z)$ and a form for this inverse in terms of the solutions of this equation and its adjoint. The corresponding homogeneous equation is solved by applying the Laplace transformation. In addition, the method of Hilb, which depends upon the repeated differentiation of the given equation and the theory of

algebraic equations in infinitely many variables, and the method of Sheffer (this Zbl. 1, 7), by the use of generalized Appell polynomials is given. The Euler differential equation in the form $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} x^m) u^{(n)}(x) = F(x)$ is treated through the substitution $u(x) = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^{-n} \right)$, an indicial equation is obtained, and if this indicial equation has only a finite number of roots, results comparable to those for the case of differential equations of finite order are obtainable. The determination of an inverse function is effected by the method of infinitely many variables.

— Equations of the Fuchsian type $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) x^n u^{(n)}(x)/n! = 0$ where $A_n(x)$ are regular at zero and non-vanishing at this point for n sufficiently large, is connected with that of an Euler equation through the use of the Laplace transformation. For the non-homogeneous equation an inverse operator $X(x, z)$ is obtained by substitution of the formal expansion of $X(x, z)$ in powers of z , coefficients functions of x , which are determined by the resolvent of an associated Euler equation. This section of the work closes with a report on v. Koch's results on an infinite system of linear differential equations, more recent, unifying results receiving passing mention. — Application of the results of the previous chapters is made in deriving formally well-known results on the solutions of the Volterra and Fredholm integral equation. Because of the formal nature, and the strenuous conditions which are required in order to make such methods applicable, the method is largely heuristic. After the derivation of the Fredholm determinant and first minor, by "calculus of operators" method, which fundamentally is closely related to the Lebesgue approximation method of deriving these results, the treatment follows the classical lines. The chapter contains a detailed exposition of the reduction of a linear differential equation of the n -th order with initial conditions to a Volterra integral equation, and the corresponding reduction to a Fredholm equation when the initial conditions are of the linear boundary value type. The final chapter presents the classical theory of characteristic functions and constants of integral equations as developed by Schmidt, and a summary of the Hilbert-Hellinger theory of the reduction of a limited quadratic form in Hilbert space. The recent important developments in this field, which are really so fundamental in the theory exposed by this book, and which it would seem have built a tool, which would transfer the formalism of the theory of differential operators from the realm of mysticism to one of mathematical clearness and rigor, are summarized in a closing paragraph. — The book abounds in exercises for the reader, has many illustrative examples — some rather trivial considering the magnitude of the theory — contains tables of fractional derivatives, Fourier integral inverses, and Laplace transformation inverses, is provided with abundant bibliography both at the close of the book, as well as in the text, touches on and expounds many topics distantly related, or suggested by the topics under discussion, such as the solution of fractional differential equations, and its application to the solution of Abel's integral equation — a variously solved equation in this volume —, an exposition of the Volterra-Pérès theory of permutable functions, four proofs of the Hadamard Theorem on the maximum value of a determinant, an exposition of Hill's differential equation, which initiated infinite determinants, and so on. In brief, the book is a source book and compendium on the subject of linear operators of the differential type. Hildebrandt (Ann Arbor).

Adams, C. Raymond: The space of functions of bounded variation and certain general spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 421—438 (1936).

The author considers some methods of metrizing the set of functions of bounded variation on $0 \leq t \leq 1$, in addition to the usual one: $(x, y) = T_0^1(x - y)$, where T = total variation. He suggests $(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt + |T_0^1(x) - T_0^1(y)|$, or $(x, y) = \text{LUB}_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + |T_0^1 x - T_0^1 y|$ and corresponding ones where T is replaced by length: $L_0^1(x)$ (see this Zbl. 11, 252). Ultimately he restricts himself to the first and calls the resulting space (BV) . This metric gives rise to a new idea in metrisation of linear vector spaces, viz., a case in which the metric (x, y) is not $(x - y, \theta)$, θ = null element of space. As a consequence postulates for such a general metric vector space are set up, one of the ideas being a contrast between metric equivalence $(x, y) = 0$ and vector equivalence $x - y = \theta$. Utilized for linear functional transformations one finds for instance, the theorem that for a metrically homogeneous operation on a metric vector space having the property $(ax, ay) = |a|(x, y)$ uniform continuity is equivalent to a Lipschitz condition, i. e. there exists a number M such that $(U(x), U(y)) \leq M \cdot (x, y)$, the greatest lower bound of such values being the modulus of $U(x)$. On the space (BV) the expression $\int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$, $\alpha(t)$ Lebesgue integrable on $0 \leq t \leq 1$ is an additive

continuous, and homogeneous functional, but for the most general uniformly continuous and additive functional $\alpha(t)$ must be measurable and bounded, the modulus being the essential upper bound of $|\alpha(t)|$ on $0 \leq t \leq 1$. The same result holds even when $\alpha(t)$ is limited to the subspaces of continuous or absolutely continuous functions of (BV) with the same metric.

T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Kantorovič, L.: On a class of functional equations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 219—224 (1936).

Basis is a linear semi-ordered space Y (see this Zbl. 13, 268). Object is to apply the method of majorants to existence theorems of functional equations. In the linear case if f and \bar{f} are two regular and continuous linear functional operations on Y to Y such that $|f| \leq \bar{f}$, then there exists a solution of (1) $y = f(y) + y_0$, if there exists a solution of the majoring equation (2) $\bar{y} = \bar{f}(\bar{y}) + \bar{y}_0$ with $|y_0| \leq \bar{y}$ by the method of successive approximations. If \bar{y}^* is this latter solution then y is the only solution of (1) satisfying $|y| \leq k\bar{y}^*$ for some k . Sequences of linear equations and an existence theorem for non-linear equations are also considered. Application is made to systems of linear equations in the space of bounded sequences, and to integral equations.

T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Sasaki, Usa, and Tōzō Ogasawara: Function of self-adjoint transformation. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 271—278 (1936).

The authors demonstrate that any transformation A defined on a subset of a Hilbert space \mathfrak{H} is a contraction of a function of a self adjoint transformation H if it is permutable with any bounded linear transformation permutable with H , generalizing a theorem of J. v. Neumann and F. Riesz (this Zbl. 12, 22) who demonstrated a similar theorem for linear bounded A . If A is a closed linear transformation on a domain dense in \mathfrak{H} then A is a function of H and only in this case. Finally every bounded linear transformation permutable with H is a function of H if and only if H has a simple spectrum.

T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Ogasawara, Tōzō: On the integral representation of unbounded self-adjoint transformations. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 279—281 (1936).

Another proof of the wellknown formula for the integral representation of unbounded self adjoint operations in a Hilbert space based on the preliminaries to the first of the proofs given by F. Riesz and E. R. Lorch (this Zbl. 13, 405) and the utilization of resolutions of the identities for bounded operators, depending on Borel sets in the xy -plane as developed by F. Maeda (this Zbl. 11, 309).

T. H. Hildebrandt.

Maeda, Fumitomo: Unitary equivalence of self-adjoint operators and constants of motion. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 283—290 (1936).

The author proves that a necessary and sufficient condition that two self adjoint operators A_1 and A_2 on a Hilbert space \mathfrak{H} be equivalent is that for every unitary operator U and every vector f $\|E_2(u)f\| = \|E_1(u)U^{-1}(f)\|$, $E_1(u)$ and $E_2(u)$ being the resolutions of the identity corresponding to A_1 and A_2 respectively, and defined for all open intervals and points on real number space. This result is applied in connections with the problem of the constants of motion for the Schrödinger wave equation (1): $\frac{h}{2\pi i} \frac{d\psi}{dt} = -H\psi$, the self adjoint operator H being the Hamiltonian. De Broglie [Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique, pp. 204—209 (1932)] has proved that if H is independent of t then $AH = HA$, but treats only the case of discrete spectra, while the domains for H and A are not clearly defined. The author calls A_t a constant of motion, provided the probability that A_t have a value in a specified range of the state $U_t f$ [solution of (1)] is independent of t , this probability being $\|E_t(u)U_t f\|$, $E_t(u)$ being the resolution of the identity for A_t and f is normalized. As a consequence A_t is a constant of motion if and only if $A_t = U_t A_0 U_t^{-1}$, i.e. A_t

is a formal solution of (1). If $U_t = e^{-(2\pi i/\hbar)Ht}$ then A is a constant of motion if and only if A is permutable with H . T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Eidelheit, M.: Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math. 6, 104—111 (1936).

Als konvexer Körper wird eine konvexe Menge mit inneren Punkten bezeichnet. Unter einer Ebene versteht man die Gesamtheit der Punkte mit $f(x) = c$, wo $f(x)$ ein lineares Funktional, c eine reelle Zahl ist. Es gilt nun der Satz: Sind zwei konvexe Körper ohne gemeinsame innere Punkte in einem linearen normierten Raume gegeben, so gibt es immer eine sie trennende Ebene. Schauder (Lwów).

Eidelheit, M.: Über lineare Gleichungen in separablen Räumen. Studia Math. 6, 117—138 (1936).

Verf. stellt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(1) y_0 = U(x)$ bei gegebenem y_0 auf. $U(x)$ ist eine lineare, in einem Raume E vom Typus (B) erklärte Funktionaloperation. Ihre Werte gehören einem Raume vom sog. Typus (B_0) an, d. h. einem linearen metrischen und vollständigen Raume, dessen Metrik durch abzählbar viele Normen charakterisiert ist. Die fraglichen Bedingungen werden in folgenden Fällen gewonnen: a) für spezielle $U(x)$ in solchen Räumen E , deren Elemente selbst lineare Funktionale eines anderen Raumes bilden, b) für Räume, die eine ausgezeichnete normierende (im Sinne des Verf.) Basis besitzen. Die Anwendbarkeit von a) wird an den Räumen L^p , l^p ($p > 1$) und s , die von b) an (c_0) , (c) , (L) , (l) (Bezeichnungen nach dem Buche von Banach) als dem Raume E illustriert. Weitere Anwendungen auf Integralgleichungen der Form $y(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$, lineare Gleichungssysteme, Summationsmethoden und Momentenprobleme. Schauder.

Eidelheit, M.: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. Studia Math. 6, 139—148 (1936).

Es seien: E ein Raum vom Typus (B_0) (vgl. vorst. Ref.), $|x|_i$ ($i = 1, 2, \dots$) die ihn definierenden Normen. Für ein gegebenes lineares Funktional $f(x) \neq 0$ definiert Verf. als $n(f)$ die kleinste, der Ungleichung $|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^N |x|_i$ genügende natürliche Zahl N . Das Gleichungssystem $(1) f_i(x) = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots$) [$f_i(x)$ gegebene lineare Funktionale] wird betrachtet. (1) ist dann und nur dann für beliebige Zahlen η_i lösbar, wenn 1. die $f_i(x)$ linear unabhängig sind, 2. für jede natürliche Zahl p ein i_p vorhanden ist, so daß $\varphi(x) = \lambda_1 f_{i_1}(x) + \lambda_2 f_{i_2}(x) + \dots + \lambda_i f_{i_i}(x)$ mit $n(\varphi) \leq p$, $\lambda_i \neq 0$ die Relation $i \leq i_p$ zur Folge hat. Aus diesem Ergebnis wird eine Bedingung dafür abgeleitet, damit das lineare Gleichungssystem $(2) \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots$) für beliebige $\{\eta_i\}$ eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| < \infty$ besitzt. Daraus folgt z. B. als Korollar: Sind alle $a_{ik} \neq 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{ik}}{a_{i+1,k}} = 0$, so besitzt (2) immer eine Lösung.

Schauder (Lwów).

Clarkson, James A.: Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396—414 (1936).

Ein Raum vom Typus B wird gleichmäßig konvex genannt und mit B_u bezeichnet, falls der Mittelpunkt einer Strecke, welche zwei Punkte x, y der Oberfläche S einer Einheitskugel verbindet, nur dann nahe an S liegt, wenn die Entfernung $\|x - y\|$ klein ist. Es erweisen sich als B_u -Räume: 1. ein Produkt von endlich vielen B_u -Räumen bei entsprechender Normierung, 2. die Räume L_p , l_p für $p > 1$ (für alle Bezeichnungen vgl. das Buch von Banach, dies. Zbl. 5, 209). Verf. betrachtet weiter additive Mengenfunktionen $F(R)$, die für Elementarfiguren R einer festen Figur R_0 eines n -dimensionalen euklidischen Raumes definiert sind und deren Werte einem B_u -Raum an-

gehören. Ein $F(R)$ von beschränkter Schwankung besitzt fast überall eine im Bochner-schen Sinne integrierbare Ableitung, und es ist $F(R) = \int_R F'(P) dP$ für absolutstetige F .

Nach einer Bemerkung von J. v. Neumann erhält man alle Differenzierbarkeits-eigenschaften auch dann, wenn sich nur eine äquivalente gleichmäßig konvexe Norm definieren läßt. Das trifft (Verf.) für endlich dimensionale Minkowskische Räume und den Raum l zu. Die Räume L, M, C lassen sich nicht gleichmäßig konvex normieren.

Schauder (Lwów).

Dunford, Nelson, and Anthony P. Morse: Remarks on the preceding paper of James A. Clarkson. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 415—420 (1936).

Alle Resultate von Clarkson (vgl. vorst. Ref.), welche sich auf Differenzierbarkeits-eigenschaften und Darstellung durch Integrale beziehen, kann man auf eine andere Weise auch in denjenigen B -Räumen erhalten, in welchen es eine solche lineare

Basis $\{\varphi_i\}$ gibt, daß aus $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\| < \infty$ immer die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ folgt. Diese Eigenschaft trifft aber für die Räume $l_p (p \geq 1)$ und $L_p (p > 1)$ zu. Endlich: In einem B -Raum, in welchem jede einer Lipschitzbedingung genügende Funktion f des reellen Parameters t

$$y = f(t); \quad y \in B, \quad a \leq t \leq b$$

fast überall differenzierbar ist, gilt dieselbe Behauptung für Funktionen von beschränkter Schwankung. Die Ableitung ist summierbar.

Schauder (Lwów).

Variationsrechnung:

Bliss, G. A.: The evolution of problems of the calculus of variations. Amer. Math. Monthly 43, 598—609 (1936).

The central place in this historical survey of the development of the Calculus of Variations is occupied by the general problem of Bolza [compare, e.g., Bull. Amer. Math. Soc. 38, 858 (1932); this Zbl. 6, 259]. In discussing a number of classical problems, such as the isoperimetric problem, the brachistochrone problem and the general Lagrange problem, as well as more recent problems, it is shown that they can be formulated so as to appear as special instances of the general problem of Bolza. Some interesting historical details are introduced. An extensive bibliography, including some unpublished papers, concludes the article.

Arnold Dresden (Swarthmore).

Gugino, E.: Sulle traiettorie dei problemi variazionali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 124—131 (1936).

The principle of least action is extended as follows: If $L(x|\dot{x})$ does not depend explicitly on t , it is well known that the Euler equations for $\delta \int L(x|\dot{x}) dt = 0$ have

as first integral $\sum_{i=1}^n (\partial L / \partial \dot{x}_i) \dot{x}_i - L = E$, which we may call the "energy integral".

It is then proved (provided that L can not be expressed as the sum of two functions, one homogeneous in the \dot{x} 's of degree zero, the other homogeneous of degree one) that the trajectories of the above variational problem for a fixed energy constant E are given also by a variational problem of the type $\delta \int L'(x|x')/E d\tau = 0$, where $x'_i = dx_i/d\tau$ and L' is homogeneous of degree one in the x'_i , and where τ is an arbitrary parameter. — The result of the application to irreversible dynamical systems is, however, essentially well known (cf. Birkhoff, Dynamical Systems, p. 37). D. C. Lewis.

Duren jr., William L.: A problem of Zermelo in the calculus of variations. Duke math. J. 2, 733—744 (1936).

Unter Beziehung auf E. Zermelo, Untersuchungen zur Variationsrechnung (Diss. Berlin 1894) wird unter dem im Titel genannten Problem das Minimumproblem

$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = \text{Min}$ verstanden, wobei $y = y^{(0)}, \dots, y^{(r)}$ an den End-

punkten vorgeschrieben sind. Führt man als gesuchte Funktionen $y_i = y^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ein, so ergibt sich das Lagrangesche Problem

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0, \dots, y_{n-1}, y'_{n-1}) dx = \text{Min}$$

mit den Nebenbedingungen $y'_{\alpha-1} - y_{\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, \dots, n-1$). — In Anlehnung an die klassische Fragestellung werden für ein relatives Minimum dieses Problems notwendige Bedingungen abgeleitet. Hinreichende Bedingungen nach Einführung eines Feldes und Aufstellung des vom Weg unabhängigen Integrals. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Lepage, Th.-H.-J.: Sur les équations canoniques d'un champ géodésique d'une intégrale multiple. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 152—157 (1936).

Soit $f(x, y, z_i, p_i, q_i)$ une fonction différentiable de $3n+2$ variables indépendantes ($i = 1, \dots, n$) et soit Ω la forme symbolique $f^{-1}(f dx + f_{p_i} \omega_i)(f dy + f_{q_i} \omega_i)$ (à sommer par rapport à i, j), ω_i désignant l'expression $dz_i - p_i dx - q_i dy$. On dit que le système de fonctions $p_i = p_i(x, y, z_1, \dots, z_n)$, $q_i = q_i(x, y, z_1, \dots, z_n)$ ($i = 1, \dots, n$) définit un champ géodésique relatif à Ω quand la différentielle symbolique $d[\Omega]$ de $[\Omega]$ est nulle; le crochet $[\]$ signifie qu'on a remplacé, dans Ω , les variables p_i, q_i par les fonctions respectives du système en question. Tout système de fonctions p_i, q_i définissant un tel champ vérifie par conséquent un système d'équations différentielles que l'on obtient en développant $d[\Omega]$ et en égalant à zéro les coefficients des termes distincts de la forme cubique correspondante. L'auteur montre que, sous certaines hypothèses concernant la fonction f , ce système d'équations différentielles peut être mis sous une forme canonique se présentant dans les recherches de MM. Carathéodory et Boerner au sujet du Calcul de Variations des intégrales multiples (voir ce Zbl. 13, 121).

O. Borůvka (Brno).

Gillis, Paul: Sur l'extension d'un théorème d'A. Haar concernant les extrémales d'une intégrale double. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 158—163 (1936).

An einem Beispiel wird gezeigt, daß die erste Variation verschwinden kann, auch ohne daß die für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung notwendigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt sind. Für den Fall, daß der Integrand linear von $u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}$ und $(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}u_{yx})$ abhängt, wird für die Extremalen ohne Voraussetzung der Existenz von Ableitungen dritter Ordnung eine Art Integro-differentialgleichung abgeleitet.

W. Feller (Stockholm).

Manià, Basilio: Sopra un problema di navigazione di Zermelo. Math. Ann. 113, 584—599 (1936).

Das Zermelosche Navigationsproblem in der Ebene (dies. Zbl. 1, 341) läßt sich auf die Form bringen: Eine Kurve $x_1(s), x_2(s)$ (s Bogenlänge) soll zwei gegebene Punkte so verbinden, daß die durch $t(s) = t_0 + \int_0^s F[x_1(\sigma), x_2(\sigma), x'_1(\sigma), x'_2(\sigma), t(\sigma)] d\sigma$ eindeutig erklärte Funktion $t(s)$ für $s = L$ — Gesamtlänge der Kurve — einen minimalen Wert erhält. Für Probleme von diesem Typus wird die Existenz eines absoluten Minimums bewiesen unter Einschränkungen, von denen die wichtigsten sind: F positiv homogen hinsichtlich x'_1, x'_2 ; $F > 0$ für alle Argumente mit $x_1'^2 + x_2'^2 = 1$; $F_1 = \frac{F x'_1 x'_2}{x_2'^2} > 0$; x_1, x_2 beschränkt auf einen abgeschlossenen konvexen Bereich. (Alle diese Voraussetzungen sind für das Zermelosche Problem erfüllt oder können, wie die letzte, ohne Beschränkung der Allgemeinheit als erfüllt angesehen werden.) In einem zweiten Teil werden unter Heranziehung einer Hamiltonschen Funktion die kanonischen Gleichungen für die Extremalen des Problems aufgestellt. Spezialisierung liefert die Zermelosche Navigationsformel.

Rellich (Marburg, Lahn).

Funktionentheorie :

Valiron, Georges: Sur les courbes de module constant des fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 402—404 (1937).

Verf. kann eine interessante Frage, die von J. M. Whittaker aufgeworfen wurde, überraschend beantworten: Zwei ganze Transzendenten $f(z)$ und $g(z)$ mögen auf derselben geschlossenen Kurve Γ festen Betrag haben. Was läßt sich über die Gesamtheit der Kurven festen Betrages aussagen? Durch konforme Abbildung des endlichen Gebietes mit dem Rand Γ in den ζ -Einheitskreis ergeben sich für f und g Darstellungen als rationale Funktionen von ζ , und daher besteht zwischen ihnen eine algebraische Gleichung, die nur vom Geschlecht Null sein kann. Daraus wieder gewinnt man eine Parameterdarstellung für f und g mit Hilfe einer einzigen ganzen Funktion, die im allgemeinen zeigt, daß alle Kurven festen Betrages für beide Funktionen zusammenfallen. In einem algebraisch wohlumschriebenen Sonderfall aber kann eine Ausnahme eintreten.

Ulrich (Gießen).

Chuang, Chi-Tai: Quelques théorèmes sur les directions de Julia et de Borel des fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 404—405 (1937).

Comme conséquence de propositions de Miranda et Valiron (voir ce Zbl. **11**, 311), l'auteur donne diverses propriétés des directions de Julia et de Borel communes à une fonction méromorphe et à ses dérivées. Si $f(z)$ ne prend qu'un nombre fini de fois deux valeurs distinctes, toutes les directions de Julia de $f(z)$ sont directions de Julia de toutes les dérivées. Si $f(z)$ est d'ordre fini et si les rapports de $N(ar, f)$ et $N(ar, 1/f)$ à $T(r, f)$ tendent vers 0 pour r infini ($a > 1$), il existe au moins une direction de Julia commune à $f(z)$ et à toutes ses dérivées. Les démonstrations sont esquissées.

G. Valiron (Paris).

Schiffer, Menahem: Sur un principe nouveau pour l'évaluation des fonctions holomorphes. Bull. Soc. Math. France **64**, 231—240 (1936).

Die für $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

bildet den Einheitskreis auf ein einfach-zusammenhängendes (Riemannsches) Gebiet D über der w -Ebene ab. \Re sei der äußere Rand von D und \hat{D} das von ihm berandete schlichte Gebiet. Die Funktion

$$F(z) = \gamma(z + \alpha_2 z^2 + \dots), \quad \gamma > 0,$$

die den Einheitskreis auf \hat{D} abbildet, ist nun (funktionentheoretische) Majorante von $f(z)$. Hieraus folgt $\gamma \geq 1$. Zu diesem bekannten Schluß und seinen Folgerungen (vgl. Rogosinski, dies. Zbl. **2**, 272) fügt Verf. die Bemerkung hinzu, daß man die Verzerrungssätze für die schlichte Majorante $F(z)$ zur Diskussion des Randes \Re hinzuziehen kann. Er findet so für jeden Randpunkt α von \Re die Ungleichung

$$|\alpha| \geq \frac{\gamma}{4} \geq \frac{1}{4},$$

ferner die Koeffizientenabschätzung

$$|a_2| \leq 4|\alpha| + 1,$$

welche Ergebnisse für $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ scharf sind. Ebenso gelten

$$|f(z)| \leq \frac{4|\alpha||z|}{(1-|z|)^2}; \quad |f'(z)| \leq \frac{4|\alpha|}{(1-|z|)^4}.$$

Sind α und β zwei Punkte irgendeines Randkontinuums von D , so ergibt sich

$$\left(\text{durch Übergang zu } \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}} \right) \text{ die Ungleichung} \quad \left| \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right| \leq 4.$$

Schließlich ergibt eine ähnliche Überlegung

$$\frac{1}{8} \leq |\varrho| (|\alpha| + \frac{3}{4}); \quad |\alpha| |\varrho| \geq \frac{1}{32},$$

wo α ein Punkt von \mathfrak{H} und ϱ Punkt eines inneren Randstückes von D ist. *Rogosinski.*

Ahlfors, Lars V.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 9, Nr 6, 1—5 (1936).

Verf. benutzt sein differentialgeometrisches Abschätzungsverfahren, um zu beweisen, daß alle doppelperiodischen Riemannschen Flächen zum Grenzpunktfall gehören, ebenso wie diejenigen Flächen, welche daraus entstehen, wenn man die q Windungssorten auflockert: indem man ihre Windungspunkte über q fremden Scheiben beliebig verschiebt. Die — hier — neuartige Verwendung sphärischer Metrik gestattet eine so starke Verallgemeinerung früherer Ergebnisse. Das Beweisverfahren in der vorliegenden Form ist aber darauf beschränkt, daß die betrachteten Flächen keine Randstellen haben. *Ullrich* (Gießen).

Stollow, S.: Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontières totalement discontinues. Mathematica, Cluj 12, 123—138 (1936).

Ein Satz von Iversen besagt, daß die Umkehrfunktion einer ganzen analytischen Funktion die im Titel angegebene Eigenschaft besitzt, deren genaue Formulierung ebenso von Iversen gegeben wurde. Verf. nennt derartige Funktionen „fonction d'Iversen“ (hier kurz I -Funktion). — Eine eindeutige I -Funktion hat als Existenzgebiet das Komplement einer geschlossenen punkthaften Menge. Die demnächst einfachsten I -Funktionen sind „verallgemeinerte algebroiden Funktionen“, d. h. Lösungen einer algebraischen Gleichung mit eindeutigen I -Funktionen als Koeffizienten. Viel tiefer liegt der Satz, daß jede irreduzible ganze (i. a. transzendente) Relation $G(x, y) = 0$ eine I -Funktion $x = x(y)$ definiert. — Es folgt eine Untersuchung über Häufungs- und Zielwerte von I -Funktionen. Folgende Resultate sollen wegen ihrer Einfachheit hervorgehoben werden: Jeder endlich oft angenommene Häufungswert einer I -Funktion ist ein Zielwert. Die Umkehrfunktion einer I -Funktion, die keine verallgemeinerte algebroiden Funktion ist, hat jeden komplexen Wert als Häufungswert. Letzteres ist als eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Weierstrass anzusehen.

Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Borel, Émile: Sur l'imitation du hasard. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 203—205 (1937).

Verf. begründet die Ansicht, daß es dem menschlichen Verstande prinzipiell unmöglich sei, Zahlenfolgen zu konstruieren, die in allem einen zufallsähnlichen Charakter haben. Eine kurze Wiedergabe der Argumente ist kaum möglich. *W. Feller.*

Hopf, Eberhard: Über die Bedeutung der willkürlichen Funktionen für die Wahrscheinlichkeitstheorie. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 46, 179—195 (1936).

Weitere lehrreiche Beispiele zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 9, 27). Am Beispiel von zwei Rouletterädern wird die Entstehung der gegenseitigen Unabhängigkeit aus beliebiger ursprünglicher Verteilung gezeigt. Für ein Rouletterad wird 1. die Gleichverteilung der Endlagen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Reibung bewiesen; 2. am Beispiel eines schlecht balancierten Rades zum erstenmal eine Sachlage diskutiert, wo sich die Endverteilung als nicht gleichförmig ergibt und nicht aus Plausibilitätsbetrachtungen vorausgesagt werden kann. Am Schluß wird mit Hilfe eines erweiterten Ergodensatzes das Verteilungsproblem beim Billard behandelt und das Streben gegen Stationarität bewiesen (die Gleichförmigkeit der Endverteilung kann heutzutage allerdings nur in sehr speziellen Fällen begründet werden, da der Nachweis für die metrische Transitivität noch aussteht). *Khintchine.*

Feller, Willy: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II. Math. Z. 42, 301—312 (1937).

Fortsetzung der gleichnamigen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 12, 361). Dem Kri-

terium für die Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes wird eine neue äquivalente Form gegeben, in welcher es als unmittelbare Verallgemeinerung der bekannten Ljapounoffschen Bedingung erscheint. Es wird folgender Satz bewiesen: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ seien gegenseitig unabhängige, nach dem Gesetz $F(x)$ verteilte zufällige Größen; strebt dann das Verteilungsgesetz von

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (x_k - b_k)$$

für $n \rightarrow \infty$ bei geeignet gewählten a_n, b_n gegen das Gaußsche Gesetz, so gilt dasselbe auch von

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (x_k - b),$$

wo b eine geeignet gewählte Konstante bedeutet.

A. Khintchine (Saratow).

Lévy, Paul: *L'arithmétique des lois de probabilité*. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 80—82 (1937).

Im folgenden soll L (mit oder ohne Index) ein beliebiges Verteilungsgesetz, A ein (endliches oder unendliches) Produkt von unzerlegbaren Gesetzen, L' ein unbeschränkt teilbares Gesetz, L'' ein Gesetz ohne Primfaktoren bedeuten (unter Multiplikation wird üblicherweise die Komposition von Verteilungsgesetzen verstanden). Es wird als bekannt vorausgesetzt, daß jedes L'' ein L' ist und daß die Umkehrung hiervon nicht gilt. Ohne Beweis werden folgende Sätze angeführt: 1. (Khintchine) Jedes L kann (im allgemeinen mehrdeutig) in der Form AL' dargestellt werden. 2. (Raikoff) Ein L' kann zugleich ein A und ein Produkt von gewissen L'' sein. 3. (Lévy) Jedes L kann in der Form AL'' dargestellt werden. 4. (Lévy) Das Verteilungsgesetz einer beschränkten, nichtkonstanten zufälligen Größe ist stets ein A ; seine charakteristische Funktion ist stets eine ganze Funktion erster Ordnung mit unendlich vielen Nullstellen. — Es wird bewiesen: Ist die charakteristische Funktion eines Produktes $L = L_1 L_2$ eine ganze Funktion, so gilt dasselbe auch von jedem der beiden Faktoren. Es wird die (inzwischen unabhängig durch Verf. und Raikoff widerlegte) Vermutung ausgesprochen, jedes Verteilungsgesetz, dessen charakteristische Funktion ganz und ohne Nullstellen ist, sei ein L' . Wäre diese Vermutung richtig, so hätte ein solches Gesetz nach dem zuletzt erwähnten Satze keine anderen Zerlegungen als die aus der Arithmetik der L' bekannten; für das Gaußsche (Cramér) und das Poissonsche (Raikoff) Gesetz ist dies tatsächlich der Fall. — Es wird die (inzwischen von Krasner, Liénard und Raikoff unabhängig bewiesene) Vermutung ausgesprochen, daß sich das Polynom

$$1 + x + \dots + x^{p-1} \quad (p = \text{Primzahl})$$

nicht in Polynome mit nichtnegativen Koeffizienten zerlegen läßt, und ihre Bedeutung für die Arithmetik der Verteilungsgesetze erläutert.

A. Khintchine (Saratow).

Krawtchouk, M.: *Fréquence, probabilité et loi des grands nombres*. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. phys.-math. **2**, Nr 2, 13—26 u. franz. Zusammenfassung 26 (1936) [Ukrainisch].

Aumann, Georg: *Elementare Wahrscheinlichkeitsgesetze der Durchmischung*. Deutsche Math. **1**, 892—896 (1936).

Unter Bezugnahme auf den Satz von Poincaré über das Kartenmischen zeigt Verf., daß beim Durchmischen einer Gesamtheit 1. der Erwartungswert h und 2. die Streuung σ der Häufigkeit eines Merkmales in einer Teilgesamtheit nach den Werten

$$h_\infty = H, \quad \sigma_\infty = H(1 - H) \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right)$$

streben (H = Gesamthäufigkeit, N und n Anzahl der Elemente der Gesamtheit und der Teilgesamtheit), vorausgesetzt, daß die dem einzelnen Mischvorgang entsprechende Substitutionsgruppe für 1. transitiv und für 2. doppeltransitiv ist. *Bruno de Finetti*.

Bartlett, M. S.: *The information available in small samples*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 560—566 (1936).

In a previous paper [Proc. Roy. Soc. A **154**, 124—137 (1936); this. Zbl. **13**, 313]

the author has stressed the importance of properties of sufficiency, for the generalization of the theory of small samples to the cases in which the probability distribution is specified by more than one parameter. In that paper, it was inferred that the first justification of the R. A. Fisher concept of the amount of information in a sample is its relationship to properties of sufficiency. — The present paper presents a further examination of the concept of statistical information in a small sample when more than one parameter is involved. Thus, consider a sample S that depends not only on a parameter α , but also on a second parameter β for which a single statistic contains all our information. Our information on α when β is unknown should be regarded not as information in S , but in $S|b$, where $S|b$ denotes the subset of S for given b . The average information on α will be the average in $S|b$ as b varies. — In dealing with the problem of location and scaling from a single sample, a valid method has been developed about the fiducial distribution of the mean m and the standard deviation σ . By an extension of the fiducial concept, Behrens and Fisher have put forward a solution for testing the difference in means between two normal samples, with unknown variances. The present paper presents a criticism of this solution.

H. L. Rietz (Iowa).

Pitman, E. J. G.: Sufficient statistics and intrinsic accuracy. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 567—579 (1936).

The author remarks that Fisher's theory of statistical estimation involves the tacit assumption that the range of distribution of the population sampled does not depend on the unknown parameter which is to be estimated. The author supplements previous investigation by examining which distributions possess the property that some or all of their parameters may be estimated by sufficient statistics. The normal distribution, Poisson distribution and all of the Pearsonian curves for example, can have some of their parameters estimated by statistics with maximum intrinsic accuracy, and hence sufficient. When the range of distribution depends upon the selected parameter, sufficient statistics seem to exist only when the frequency function of the population involves the parameter merely through an external factor which is a function of this parameter. The theorem on the maximum intrinsic accuracy of statistics no longer holds in general when the range is a function of the parameter unless the distribution is continuous and is zero at any end-point dependent on the parameter. Nevertheless the intrinsic accuracy seems to continue to serve as a good indication of the value of a statistic. The special form necessarily displayed by the population, where no sufficient statistic exist, but where a sufficient pair exists is found. Extensions to sufficient sets of higher order are suggested. *Albert A. Bennett (Providence).*

Waugh, Frederick V.: A simplified method of determining multiple regression constants. *J. Amer. Statist. Assoc.* **30**, 694—700 (1935).

This paper describes certain modifications of the process published by Horst (see this Zbl. **5**, 256), for applying the Doolittle method to the calculation of regression coefficients with their standard errors and the coefficients of partial and multiple correlation, which make for greater numerical convenience. The chief difference consists in beginning with the calculation of the elements of the determinant inverse to the correlation determinant, instead of the calculation of the correlation determinant and the elements of its adjoint. The modified process is illustrated numerically.

C. C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Waugh, Frederick V.: The analysis of regression in subsets of variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* **31**, 729—730 (1936).

Referring to his previous paper (see the prec. rev.), the author notes that Sylvester's theorem on the minors of the adjoint of a given determinant makes it quite easy to compute the initial quantities needed for a subset of $n - 1$ variables from those previously calculated for the complete set of n variables. *C. C. Craig (Ann Arbor).*

Fisher, Ronald Aylmer: Uncertain inference. Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **71**, 245—258 (1936).

For students who have already obtained some grasp of Fisher's theory of estimation, this paper, which discusses the historical setting and the significance of the main ideas of that theory, and which states at the close the chief remaining problem whose solution is required to complete that theory, will be most helpful. *C. C. Craig.*

Kellerer, Hans: Die Konzentrationskurven in der angewandten Statistik. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch. **3**, 57—67 (1937).

Del Vecchio, Ettore: Il problema generale del calcolo della riserva matematica su tavole compatte. Giorn. Mat. Finanz., II. s. **6**, 85—98 (1936).

Haben die Größen $y, t, l_{[y]+t}$ die übliche Bedeutung und ist $f_{[y]+t}^{(i)}$ die Anzahl der aus der i -ten Ursache ausscheidenden Versicherten, zählt ferner der Versicherer bei dem Ausscheiden aus dieser Ursache den Betrag $U_{[y]+t}^{(i)}$ und weiters an jeden Versicherten eine stetige Rente mit der Intensität $S_{[y]+t}$, während die Intensität der Prämie $P_{[y]+t}$ sei und vom Versicherten am Beginn der einmalige Betrag ${}_0V_{[y]}$ geleistet werde, so erhält man für die Prämienreserve:

$$l_{[y]+t} {}_tV_{[y]} = e^{\varphi(t)} \left[l_{[y]} {}_0V_{[y]} + \int_0^t P_{[y]+\tau} e^{-\varphi(\tau)} l_{[y]+\tau} d\tau - \sum_{i=1}^n \int_0^t U_{[y]+\tau}^{(i)} e^{-\varphi(\tau)} df_{[y]+\tau}^{(i)} - \int_0^t S_{[y]+\tau} e^{-\varphi(\tau)} l_{[y]+\tau} d\tau \right].$$

Bildet man die totale Reserve $\int_{\alpha}^{\beta} l_{[y]+t} {}_tV_{[y]} dy$ und setzt in dieses Integral die

Mittelwerte ${}_t\mathfrak{B} = \int_{\alpha}^{\beta} l_{[y]+t} {}_tV_{[y]} dy$; $\mathfrak{L}_t = \int_{\alpha}^{\beta} l_{[y]+t} dy$; $\mathfrak{L}_t \mathfrak{P}_t = \int_{\alpha}^{\beta} P_{[y]+\tau} l_{[y]+\tau} dy$;

$\mathfrak{S}_t \mathfrak{L}_t = \int_{\alpha}^{\beta} S_{[y]+\tau} l_{[y]+\tau} dy$; $\mathfrak{L}_t^{(i)} = \int_{\alpha}^{\beta} f_{[y]+\tau}^{(i)} dy$; $\mathfrak{U}_t^{(i)} = \frac{1}{d\mathfrak{L}_t^{(i)}} \int_{\alpha}^{\beta} U_{[y]+\tau}^{(i)} d\mathfrak{L}_t^{(i)} dy$ ein, so erhält

man für die mittlere Reserve den analogen Ausdruck zu dem obigen, nur sind jetzt an die Stelle der Selekttafeln Kompakttafeln getreten. Sodann werden die Formeln für $t=0$, $\alpha=0$, $\beta=T$ spezialisiert. Anschließend wird die Frage des Verlaufs von \mathfrak{P}_t untersucht, das Ergebnis gestattet dann den Einfluß, den das Ersetzen von \mathfrak{P}_t durch einen festen Mittelwert \mathfrak{P} auf die Reserve ausübt, zu studieren. Die Anwendung der entwickelten Gedankengänge auf elementare Fälle gestattet bemerkenswerte Einblicke.

E. Knoll (Wien).

Zwigg, Ernst: Die Bedeutung der Integralgleichungen für die Berechnung und Darstellung des Deckungskapitals. Bl. Versich.-Math. **4**, 36—40 (1937).

Eine Polemik mit der von H. Schulthess ausgesprochenen Ansicht (s. dies. Zbl. **14**, 322), daß die Anwendung der Integralgleichungen auf Probleme des Deckungskapitals weder methodisch noch praktisch von Vorteil ist. *Birnbaum (Lwów).*

Giaccardi, F.: Sulla rendita di gruppo al primo decesso nell'ipotesi di Makeham. Giorn. Mat. Finanz., II. s. **6**, 99—111 (1936).

Formt man die Formel ${}_n\bar{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} = \int_0^n e^{-\delta z} \prod_{r=1}^m \frac{l(x_r + z)}{l(x_r)} dz$ mittels des Makeham-schen Ausdruckes in bekannter Weise um: ${}_n\bar{a}_{x_1 \dots x_m} = \int_0^n \int_0^{\bar{B}z} e^{\bar{H}e^{\lambda z}} dz$, so kann man nach

der Substitution $y = e^{\bar{B}z}$ durch wiederholte partielle Integration zu einer konvergenten Reihe

$$\int \bar{\beta} y^{\bar{\alpha}} dy = y \bar{\beta} y^{\bar{\alpha}} \left[1 - \frac{\bar{\alpha} \ln \bar{\beta}}{\bar{\alpha} + 1} y^{\bar{\alpha}} + \frac{\bar{\alpha}^2 (\ln \bar{\beta})^2}{(\bar{\alpha} + 1)(2\bar{\alpha} + 1)} y^{2\bar{\alpha}} \dots \right]$$

gelangen, deren Größen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ mit den Konstanten der Makehamschen Formel und den Altern $x_1, x_2 \dots x_m$ in einem einfachen Zusammenhang stehen. Die Spezialisierung der Formel auf ein Leben führt dann zu einer Deutung der Formel für die verbundenen

Leben durch Einführung eines fiktiven einzelnen Lebens eines fiktiven Alters, wie das ja schon bekannt ist. Anschließend wird direkt eine brauchbare Näherungsformel für $\{n^{a_{x_1, x_2, \dots, x_n}}\}$ ermittelt. *F. Knoll (Wien).*

Koeppler, Hans: Betrachtungen über das durchschnittliche Risiko und über die absolute Gewinnhoffnung des Versicherten bei kontinuierlichen Versicherungen mit zwei verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten. *Giorn. Mat. Finanz.*, II. s. 6, 73—84 (1936).

Zuerst wird die Differentialgleichung für die absolute Gewinnhoffnung $G(k, t)$ aufgestellt, die als unabhängig von k angesehen wird, dann wird auch die Variabilität von k berücksichtigt. Darauf wird eine Lösung der Integralgleichung der Funktion $H(k, t)$ von der Form des durchschnittlichen Risikos durch das Verfahren der klassischen Differentiation durchgeführt. Zum Schluß wird noch eine Integralgleichung der absoluten Gewinnhoffnung des Versicherten durch Differentiation nach der oberen Grenze gelöst. *Janko (Praha).*

Numerische und graphische Methoden.

Plamitzer, H.: Zur Regula falsi. *Bull. int. Acad. Polon. Sci. A* 1936, 436—438.

Es wird der bekannte Satz gezeigt, daß die in geeigneter Weise wiederholte Anwendung der Regula falsi eine Zahlenfolge liefert, die gegen eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ konvergiert. *Fritz Rehbock (Bonn).*

Ostrowski, Alexander: Konvergenzdiskussion und Fehlerabschätzung für die Newtonsche Methode bei Gleichungssystemen. *Comment. math. helv.* 9, 79—103 (1937).

Gesucht eine Lösung des Gleichungssystems $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$. Voraussetzungen: f und g seien reelle stetige Funktionen reeller Veränderlicher. In einem achsenparallelen Quadrat, das eine Lösung ξ, η enthält, seien die ersten und zweiten Ableitungen stetig, und es sei $|f_x|$ und $|f_y| < M$, $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$ und $|f_{yy}| < \mathfrak{M}$, der abs. Betrag der Funktionaldet. $> m$. Nach dem Newtonschen Verfahren werde eine Punktfolge $P_n(x_n, y_n)$ gebildet ($n = 0, 1, \dots$), und es sei δ_n die größere der Zahlen $|\xi - x_n|$, $|\eta - y_n|$. P_0 liege in jenem Quadrat, und es sei $\delta_0 < \frac{m}{4M\mathfrak{M}}$. Satz: Die Newtonsche Punktfolge konvergiert, und es ist $\delta_{n+1} \leq \frac{4M\mathfrak{M}}{m} \delta_n^2$. Aus diesem Satz werden genaue Fehlerabschätzungen für den praktischen Rechner gewonnen. *Fritz Rehbock (Bonn).*

Wanke, J.: Zweckmäßige Auflösung der linearen gewöhnlichen und Differenzengleichungen. *Bauing.* 18, 35—39 (1937).

Zur Auflösung von linearen dreigliedrigen Differenzengleichungen

$$\delta_{k, k-1} X_{k-1} + \delta_{k, k} X_k + \delta_{k, k+1} X_{k+1} = \delta_{k, 0} \\ k = 1, 2, \dots, n \quad (X_0 = 0, X_{n+1} = 0)$$

empfiehlt der Verf. eine von der üblichen abweichende stufenweise Elimination. Zunächst soll man die Unbekannten ungerader Nummer nach Gleichung 1, 3, 5, ... durch die Unbekannten gerader Nummer ausdrücken und das Ergebnis in Gleichung 2, 4, 6, ... einsetzen. Dadurch entsteht wieder ein System von dreigliedrigen Differenzengleichungen für nur $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$ Unbekannte: 1. Stufe des Berechnungsverfahrens. Mehrere solche Stufen führen schließlich zu einer Gleichung für eine Unbekannte. Die Eliminationen einer Stufe sind unabhängig voneinander und daher die Gleichungen einer Stufe etwa gleich empfindlich gegen Rechenungenauigkeiten. Weil in den einzelnen Stufen im allgemeinen mehr Eliminationen als bei der üblichen Elimination von X_1, X_2, \dots der Reihe nach oder bei Elimination von vorwärts und rückwärts zugleich gemacht werden, ist dies Verfahren besonders bei vielen Unbekannten infolge geringerer Stufenzahl günstiger. Die Rechenarbeit ist die gleiche. Der Verf. überträgt das Verfahren auch auf mehr als dreigliedrige Gleichungen. Die Unbekannten müssen dann

je nach Gliederzahl zu Paaren, Dreiergruppen usw. aufeinanderfolgender Unbekannten zusammengefaßt werden.

Theodor Zech (Darmstadt).

Ricci, Giovanni: Su una formula di K. Petr per il calcolo numerico degli integrali definiti. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 15, 187—196 (1936).

Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer Reihe, die K. Petr (1915) zur näherungsweise Berechnung eines best. Integrals angegeben hat und deren Restglied auch von Watson [Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky 65, 1—7 (1935)] untersucht wurde.

Fritz Rehbock (Bonn).

Witt, G.: Zur Berechnung der Perioden der elliptischen Integrale. Astron. Nachr. 261, 429—434 (1937).

Die Berechnung der Perioden der elliptischen Normalintegrale 1. und 2. Gattung in der Weierstrassischen Theorie läßt sich bekanntlich auf hypergeometrische Reihen zurückführen. Setzt man $x = 1/J = (g_2^3 - 27 g_3^2)/g_2^3$,

so kommt es auf die beiden Reihen

$$F_\omega = F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, x\right), \quad F_\eta = F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, x\right)$$

an. L. Arndt hat in seiner Dissertation „Beiträge zur Berechnung der störenden Kräfte in der Theorie der säkularen Störungen“ (Berlin 1895) eine Tafel der Werte von F_ω, F_η für reelle x des Intervalls $0 < x < 1$ gegeben. Verf. bietet Ergänzungen zu dieser Tafel. Dies ist nur für Werte von x erforderlich, die nahe bei 1 liegen, da in diesem Teil der Arndtschen Tafel die Größe der höheren Differenzen das Interpolieren erschwert. Nach einer Formel von Gauß ist, wenn $\xi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x})$ gesetzt wird,

$$F_\omega = F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right), \quad F_\eta = F\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, 1, \xi\right).$$

Benutzt man ξ an Stelle von x als Tafelargument, so wird der erwähnte Übelstand vermieden. Verf. gibt für die 101 Werte ξ von 0,400 bis zu 0,500 (entsprechend 0,96 bis zu 1 für x) achtstellige Werte von F_ω und F_η nebst ihren ersten Differenzen. Für Zwecke, bei denen eine noch größere Genauigkeit erforderlich ist, sind die Kettenbrüche

$$F_\omega = 1 + \frac{\frac{5}{36}\xi}{1} + \frac{\frac{77}{144}\xi}{1} + \frac{\frac{191}{1296}\xi}{1} + \dots$$

$$F_\eta = 1 - \frac{\frac{7}{36}\xi}{1} + \frac{\frac{65}{144}\xi}{1} - \frac{\frac{251}{1296}\xi}{1} + \dots$$

den Reihen vorzuziehen. Deshalb gibt Verf. noch die achtstelligen Logarithmen der Koeffizienten von ξ für die ersten acht bzw. neun Teilbrüche und teilt eine Abschätzung der Restkettenbrüche mit.

Bessel-Hagen (Bonn).

Geometrie.

Hunziker, Gustav: Nachweis von Fehlern in der euklidischen Parallelentheorie. (117. Jahresvers., Solothurn, Sitzg. v. 28.—30. VIII. 1936.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 242—243 (1936).

Cassina, U.: Su l'equivalenza fra figure geometriche e le nozioni di volume, area e lunghezza. Period. Mat., IV. s. 17, 1—13 (1937).

Weber, Werner: Über Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in günstigen Fällen. Deutsche Math. 1, 782—802 (1936).

Man kann Winkel konstruieren, deren Trisektion mit Zirkel und Lineal möglich ist. Die Kubusverdoppelung ist jedoch niemals mit Zirkel und Lineal möglich. Daselbe gilt für alle die Probleme, die nur von einer gegebenen Strecke abhängen oder die sich in einem genau präzisierten Sinne auf Probleme mit nur einer gegebenen Strecke zurückführen lassen. Es wird nun die Frage aufgeworfen, ob es außer diesen noch andere Probleme gibt, die in einem vorgegebenen Bereich eine Lösung besitzen, welche algebraisch von den gegebenen Strecken abhängt, aber deren Lösung in keinem

konstruierbaren Einzelfall mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Oder: Gibt es ganzzahlige Polynome in mehr als einer Veränderlichen, die niemals den Wert Null annehmen, wenn für die Veränderlichen Werte aus durch Quadratwurzeln erzeugbaren Zahlkörpern eingesetzt werden? Diese Fragen werden nicht beantwortet. [Anm. des Ref.: Bei der engen Definition der Zurückführbarkeit auf Probleme mit nur einer geg. Strecke, die der Verf. gibt, liefert $(\eta - \xi_1)^3(\eta - \xi_2)^3 - 2\xi_1^6 = 0$ die bejahende Antwort auf beide Fragen. In einem weiteren Sinne ist dieses Problem auf die Kubusverdoppelung zurückführbar.] *van der Waerden* (Leipzig).

Sauve, Antonio: Alcune proprietà generali dei poligoni e dei polilateri. Mem. Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei, III. s. 2, 263—277 (1936).

Die Abhandlung beschließt eine Reihe von Untersuchungen über Vielseite und Vielecke, die am gleichen Ort 1925, 1931, 1932 veröffentlicht worden sind. Sie fügt insbesondere den Begriff des „Hauptpunktes“ (O) eines n -Eckes (A_1, A_2, \dots, A_n) hinzu, der sukzessive aus dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises eines Dreieckes entsteht und vermittels der Bedingung $OA_j \cdot OB_j = \text{konst.}$ durch die Hauptpunkte B_j der n ($n-1$)-Ecke bestimmt ist, die in dem n -Eck enthalten sind. Wenn auch einzelne Beweise angedeutet oder durchgeführt sind, so gilt im allgemeinen das Schlußwort des Verf.: „Die Sätze haben keinen anderen Beweis als den Versuch, weshalb ich sie als Sätze der experimentellen Geometrie bezeichnet habe.“ *W. Ludwig* (Dresden).

● **Steiner, Jacob: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität, und Reciprocität, etc.** Tl. 1. Hrsg. v. A. J. von Oettingen. Unveränd. Nachdruck. (Ostwalds Klassiker d. exakt. Wiss. Nr. 82.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1936. 126 S., 2 Taf. u. 14 Fig. RM. 4.40.

Die vorliegende Schrift stellt einen unveränderten Abdruck des 1. Teils der bereits im Jahre 1897 bei Ostwalds Klassikern wiedergedruckten, für die gesamte synthetische Geometrie grundlegenden und klassischen Steinerschen Arbeit dar. Die Schrift ist auch heute noch lesbar und bemerkenswert durch mannigfache geometrische Aufgaben, die durch projektive Konstruktionen gelöst werden. Vom Herausgeber von Oettingen stammt ein Zusatz über die zeichnerische Darstellung der räumlichen Beziehungen. Steiner selbst beschränkt sich auf Zeichnungen bei ebenen Sätzen. *Bureau* (Hamburg).

Dantoni, Giovanni: Omografie che trasformano in sé una data quadrica non specializzata con applicazioni alle proiettività ed antiproiettività su una forma di 1^a specie. Mem. Accad. Ital. 8, 1—21 (1936).

Die Arbeit enthält eine rein synthetische Untersuchung der Kollineationen des R_3 , die eine reelle Quadrik in sich überführen. Die Kollineationen werden nach Predella durch ihre Fixelemente und deren Vielfachheit gekennzeichnet, wobei in diesem Falle noch zu unterscheiden ist, ob die Fixelemente der Quadrik angehören oder nicht. Die automorphen Kollineationen können zunächst von 1. Art sein, d. h. die beiden Erzeugendenscharen in sich transformieren mittels binärer Kollineationen, die parabolisch, nichtparabolisch oder gleich der Identität sein können. Hieraus ergeben sich in einfacher Weise die Fixelemente der zugehörigen räumlichen Kollineationstypen, die einzeln angegeben werden. Bei den Kollineationen 2. Art, die beide Scharen der Quadrik miteinander vertauschen, führt die Betrachtung des Quadrates der Abbildung, das dann von 1. Art ist, zum selben Ziele. Es schließt sich eine analoge Untersuchung der reellen Kollineationen an, die eine Quadrik mit reeller Gleichung in sich überführen, wobei die Fixelemente auch konjugiert imaginär zueinander sein können. Zuzufolge der bekannten Abbildung der Punkte der komplexen projektiven Geraden auf die reellen Punkte eines Ellipsoids, dessen automorphe Kollineationen den binären Projektivitäten und Antiprojektivitäten entsprechen, wird weiterhin angegeben, welche Typen binärer Projektivitäten und Antiprojektivitäten den einzelnen

automorphen Kollineationen entsprechen. Der letzte Abschnitt enthält dann noch eine Untersuchung über die Antiprojektivitäten, die mit einer binären Projektivität vertauschbar sind.

Burau (Hamburg).

Turri, Tullio: Omografie razionali proiettivamente distinte nel campo razionale e non nel campo reale o nel campo complesso. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 7, 111—127 (1936).

Condizione necessaria e sufficiente perchè, data un' omografia razionale α , esistano omografie razionali proiettivamente distinte da α nel campo razionale ma proiettivamente identiche nel campo reale o solo nel campo complesso, è che la α sia permutabile con omografie che non ne lasciano fissi gli spazi caratteristici.

Autoreferat.

Graf, Ulrich: Zur Liniengeometrie im linearen Strahlenkomplex und zur Laguerreschen Kugelgeometrie. Math. Z. 42, 189—202 (1937).

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Isomorphie zwischen der Geometrie des linearen Strahlenkomplexes und der Laguerreschen Kugelgeometrie in nicht-euklidischen Räumen. Der Ausbau dieser Isomorphie stellt die linearen Mannigfaltigkeiten linearer Strahlenkongruenzen denjenigen orientierter Kugeln gegenüber, die Involutionen des linearen Strahlenkomplexes den Laguerreschen Spiegelungen usf. Ein besonderer Abschnitt ist quadratischen Kongruenzmannigfaltigkeiten im linearen Strahlenkomplex gewidmet.

Haenzel (Karlsruhe).

Krau, Wilhelm: Über euklidische Bewegungen. Deutsche Math. 1, 880—881 (1936).

Mittels des besonders von Weiß in dem Buch „Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik“, Leipzig 1936, behandelten Biquaternionenkalküls wird in dieser Note ein einfacher Beweis des Satzes erbracht, daß jede reelle Bewegung des R_3 , die keine Schiebung ist, sich eindeutig als Schraubung auffassen läßt.

Burau (Hamburg).

Soddy, Frederick: The bowl of integers and the hexlet. Nature 139, 77—79 (1937).

Es handelt sich um eine Anordnung von Kugeln unbegrenzter Anzahl innerhalb einer Kugel. Diese Anordnung hat verschiedene merkwürdige Eigenschaften. Insbesondere läßt sich die Krümmung einer Kugel aus den Krümmungen benachbarter Kugeln nach einem einfachen für jede Kugel geltenden Schema berechnen.

F. Laves.

Behrend, Felix: Über einige Affinvarianten konvexer Bereiche. Math. Ann. 113, 713—747 (1937).

Es sei $g(\mathfrak{f})$ eine metrische Invariante eines ebenen konvexen Bereichs \mathfrak{f} , die für alle \mathfrak{f} unter einer festen Schranke bleibt. Alsdann ist die obere Grenze $G(g, \mathfrak{L})$ von $g(\mathfrak{f})$, wenn \mathfrak{f} die Klasse \mathfrak{L} aller Bereiche durchläuft, die aus \mathfrak{f} durch affine Transformationen entstehen, eine Affinvariante von \mathfrak{f} (oder der Klasse \mathfrak{L}). Verf. untersucht die in dieser Weise aus den metrischen Invarianten

$$g_1 = \frac{d_i}{d_u}, \quad g_2 = \pi \frac{d_i}{u}, \quad g_3 = \frac{\pi d_i^2}{4 f}, \quad g_4 = \frac{1}{\pi} \frac{u}{d_u}, \quad g_5 = \frac{4}{\pi} \frac{f}{d_u^2}, \quad g_6 = 4\pi \frac{f}{u^2}$$

entstehenden Affinvarianten. Hierbei bedeuten d_i die Dicke, d_u den Durchmesser, u den Umfang, f den Flächeninhalt von \mathfrak{f} . Zunächst sei \mathfrak{f} ein Bereich mit Mittelpunkt. Sämtliche g , sind dann auf Grund bekannter Ungleichungen ≤ 1 , und ein Gleichheitszeichen steht nur für den Kreis. Daraus folgt für die Affinvarianten $G_v(\mathfrak{L}) = G(g_v, \mathfrak{L})$, daß sie ihr Maximum 1 in der Klasse der Ellipsen und nur in dieser erreichen. Ein Hauptergebnis der Arbeit ist, daß die G_v ihr Minimum sämtlich für die Parallelogramme und nur für diese annehmen (z. T. ist dies auf anderem Wege auch von John gezeigt worden; vgl. dies. Zbl. 15, 171). In jeder Klasse \mathfrak{L} gibt es zu jedem der obigen g_v wenigstens einen „Maximumbereich“ \mathfrak{L}_v , für den $g_v(\mathfrak{L}_v) = G_v(\mathfrak{L})$ ist. $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_5$ sind eindeutig bestimmt und lassen sich durch einige einfache Eigenschaften charakterisieren. So ist z. B. \mathfrak{L}_5 durch jede der folgenden Eigenschaften gekennzeichnet: 1. Die Durchmesser von \mathfrak{L}_5 (Sehnen der Länge d_u) lassen sich nicht sämtlich in das Innere eines rechten Winkels fassen. 2. Der Umkreis von \mathfrak{L}_5 ist die (wie gezeigt wird, eindeutige)

umschriebene Ellipse kleinsten Flächeninhalts. Die Invariante G_5 eines beliebigen konvexen Bereichs ist gleich dem Verhältnis der Flächeninhalte des Bereichs und der kleinsten umschriebenen Ellipse. Ähnliches gilt für I_1 und I_3 bzw. G_1 und G_3 . Auch über I_6 lassen sich genauere Aussagen machen. Schließlich werden die Extremwerte der G_v auch für Bereiche ohne Mittelpunkt bestimmt und festgestellt, wann sie erreicht werden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Vincensini, Paul: Sur les corps de largeur constante de l'espace à trois dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 84—86 (1937).

Die in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **12**, 272 u. **15**, 120) für den ebenen Fall durchgeführten Untersuchungen des Verf. über die Fortsetzbarkeit von Linearscharen konvexer Bereiche und die Bestimmung konvexer Bereiche mit vorgegebenem Vektorenbereich lassen sich größtenteils auf den Raum übertragen. Hierbei wird wie früher vorausgesetzt, daß die Ränder überall endliche Krümmungen besitzen. Das Verfahren des Verf. gestattet alle (genügend regulären) konvexen Körper, deren Vektorenbereich die Kugel ist, also alle Körper konstanter Breite zu gewinnen. Nebenbei ergibt sich (auf bekannte Weise, vgl. z. B. Blaschke, Differentialgeometrie I, 3. Aufl., § 92), daß jede geschlossene Fläche konstanter mittlerer Krümmung eine Kugel ist, wobei von der Fläche nicht die Konvexität, sondern nur die Darstellbarkeit mittels einer Stützfunktion vorausgesetzt zu werden braucht.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Segre, Beniamino: Intorno alle ovali sghembe, e su di un'estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili. Mem. Accad. Ital. **7**, 365—397 (1936).

Ausführliche Darstellung der in einer Voranzeige (dies. Zbl. **14**, 224) angekündigten Untersuchungen. Zum Beweise der Sätze über die hier betrachteten Raumkurven 4. Ordnung C_4 (welche beschränkt, von Doppelpunkten und Trisekanten frei und mit scharfer Tangente sowie mit stetiger Schmiegeebene versehen sein sollen) stützt sich Verf. auf eine genaue Analyse der folgenden Abbildung der C_4 auf sich: Durch jeden Punkt P der C_4 gehen genau zwei Doppeltangentialebenen an die C_4 , deren (zweite) Berührungspunkte P' bzw. P'' dem P als Bilder zugeordnet werden. — An früher noch nicht berichteten Ergebnissen erwähnen wir jetzt: Jede derartige C_4 besitzt mindestens zwei Prinzipalsehnen; das sind solche Geraden, welche mit der C_4 zwei Punkte gemeinsam haben und als Schnitt der Schmiegeebenen an die C_4 in besagten zwei Punkten darstellbar sind. Ist die C_4 algebraisch, so gibt es auch nicht mehr als zwei Prinzipalsehnen. — Im übrigen muß auf die Einzelheiten der reichhaltigen Arbeit verwiesen werden.

Haupt (Erlangen).

Marchaud, André: Sur le contingent et le paratingent en un point d'une surface simple de Jordan. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 86—89 (1937).

Le but de cette note est d'établir le résultat suivant: Si, en un point M d'une surface simple de Jordan non situé sur le bord, le paratingent est incomplet, il existe quatre demi-cônes de sommet M : p_1, p_2, c_1, c_2 tels que: 1° p_1 et p_2 sont convexes et opposés; 2° c_1 et c_2 ne se pénètrent pas et contiennent respectivement p_1 et p_2 ; 3° le paratingent est l'ensemble des demi-droites non intérieures à p_1 ou p_2 , le contingent est l'ensemble des demi-droites non intérieures à c_1 et c_2 . — Il en résulte en particulier que l'absence de demi-droites intérieures au paratingent entraîne la planéité du contingent et sa coïncidence avec le paratingent, d'où l'existence d'un plan tangent variant d'une façon continue (résultats établis antérieurement par H. Bouligand et H. Mirguet).

F. Blanc (Paris).

Algebraische Geometrie:

● **Vries, Hk. de:** Einführung in das Studium der abzählenden Geometrie. (Noordhoffs Samml. v. math. Werken Nr. 17.) Groningen-Batavia: P. Noordhoff 1936. VIII, 312 S. fl. 4.75 [Holländisch].

Es gibt nach des Verf. Erfahrung kein besseres Mittel, Geometrie zu lernen, als das Studium des Schubertschen „Kalküls der abzählenden Geometrie“. Das vor-

liegende Werk gibt eine leichtverständliche Darstellung und Begründung dieses Kalküls, mit vielen Beispielen und Anwendungen. Die Darstellung richtet sich hauptsächlich nach Schuberts Werk, jedoch werden auch Methoden und Ergebnisse von Zeuthen, Schuh, Schaake und anderen behandelt. *van der Waerden* (Leipzig).

Ghermanescu, Michel: Sur les quadriques homofocales. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 89—90 (1937).

Bemerkung zu der Abhandlung von Wolkowitsch: „Sur les quadriques homofocales“ (dies. Zbl. **15**, 75), deren Ergebnisse in anderem Zusammenhange von Verf. behandelt wurden. *Haenzel* (Karlsruhe).

Hollerott, T. R.: The web of quadrics. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 937—944 (1936).

Mehrdeutige Transformation zwischen zwei dreidimensionalen Räumen, die den Ebenen des ersten Raumes die Quadriken eines ∞^3 Linearsystems entsprechen läßt; Aufzählung der Charaktere der Doppelfläche und der Verzweigungsfläche der Transformation in verschiedenen Fällen, wo das gegebene System von Quadriken 0, 1, ..., 6 Basispunkte, eine oder zwei Basisgeraden, einen Basiskegelschnitt usw. besitzt.

E. G. Togliatti (Genova).

Cattaneo, Paolo: Sopra una particolare quartica piana trinodale. Esercit. Mat., II. s. **9**, 147—151 (1936).

Semple, J. G.: Contact conditions for surfaces. Proc. Roy. Irish Acad. A **43**, 49—71 (1936).

Der Ausgangspunkt dieser Abhandlung ist die Betrachtung (im I. Teil) eines Doppelpunktes O einer Fläche ψ , dem eine gegebene Anzahl von Doppelpunkten auf einem von O ausgehenden linearen Zweig unendlich nahe sind; eine Reihe geeigneter quadratischer Transformationen löst die betrachtete Singularität in eine Kette rationaler Kurven e_i auf, die einer neuen Fläche ψ' angehören. Wichtig für die ganze Arbeit ist der Begriff einer letzten Totalbasis $\sum \mu_i e_i$ (wo $\mu_i \geq 0$); sie bedeutet ein Aggregat aus Kurven e_i , so beschaffen, daß das System $|lS' - \sum \mu_i e_i|$, wobei l eine positive ganze Zahl und S' die ebenen Schnittkurven von ψ' sind, keine Kurve e_i als festen Bestandteil enthält, während die μ_i die kleinstmöglichen Werte besitzen; für jede Wahl der Kurve $\sum \lambda_i e_i$ gibt es eine bestimmte entsprechende letzte Totalbasis, die von l nicht abhängt (und die durch eine graphische Darstellung in einem Punktgitter leicht bestimmt werden kann). — Im II. Teil werden Flächen F einer V_3 betrachtet, die längs einer gegebenen Kurve C eine Berührung gegebener Ordnung aufweisen; eine Reihe geeigneter quadratischer Transformationen gestattet diesem Begriff einen genauen Sinn zu geben und die betrachtete Bedingung durch das Hindurchgehen durch gewisse Linien zu ersetzen. Jene Flächen besitzen auf C eine Anzahl von teils festen und teils beweglichen Doppelpunkten wie diejenigen, die im I. Teil studiert worden sind. Der Fall, wo die Flächen F mit einer gegebenen Fläche ψ in einem Punkte O , der für ψ einfach oder doppelt sein kann, eine Berührung gegebener Ordnung aufweisen, wird auf den vorigen Fall reduziert. — Im III. Teil wird die Schnittlinie L der ursprünglichen Fläche ψ mit einer Fläche F untersucht, die mit ψ in O eine gegebene Berührung hat; hauptsächlich wird die Singularität von L in O untersucht: L besitzt in der Umgebung von O einen gewissen infinitesimalen Teil und besteht weiter aus einem endlichen Teil, der durch O mit verschiedenen Zweigen hindurchgeht. — Im IV. Teil werden zwei Formeln angegeben, die die Postulation einer Berührungsbedingung der oben betrachteten Art und ihre Äquivalenz in bezug auf Flächen einer gegebenen Ordnung ausdrücken. Schließlich eine Reihe von Beispielen; insbesondere die Berührung der Ordnung s längs einer gegebenen Kurve. — Die behandelten Fragen und die Ergebnisse decken sich teilweise mit Fragen und Ergebnissen, die, mit anderen Methoden, bei H. Hudson zu finden sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur la variété des cordes d'une surface de Veronese. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **5**, 244—246 (1936).

Longhi, Ambrogio: *Le tangenti multiple delle rigate algebriche.* Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. 68, 1—42 (1936).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 131) hat der Autor die möglichen Singularitäten einer algebraischen Regelfläche des Raumes S_3 untersucht. Nunmehr werden bestimmt: die Anzahl der Tangenten mit einer fünfpunktigen Berührung, der Grad der Regelfläche der vierpunktig berührenden Tangenten, Feldgrad und Bündelgrad der Kongruenz der Haupttangenten, alles mit genauer Angabe der Multiplizitäten, mit denen die einzelnen vielfachen Tangenten zu zählen sind. Weiter werden berechnet: Rang und Geschlecht der genannten Regelfläche, Ordnung der Regelfläche der dreimal berührenden Tangenten und der Regelfläche der Haupttangenten, welche die Fläche außerdem noch einmal berühren, Grad und Geschlecht der Kurve der Berührungspunkte der vierpunktig berührenden Tangenten, Grad der Kurve der Berührungspunkte der dreimal berührenden Tangenten sowie der beiden Kurven der Berührungspunkte der die Fläche noch einmal berührenden Haupttangenten, schließlich alle Anzahlen von Tangenten mit noch mehr oder noch höheren Berührungen. Die abwickelbaren Regelflächen werden gesondert behandelt. Das Geschlecht einer Regelfläche, die Durchschnitt einer Kongruenz und eines Komplexes ist, wird berechnet.

van der Waerden (Leipzig).

Morin, U.: *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 188—190 (1936).

Pour qu'une hypersurface algébrique générale d'un S_r , d'ordre n , contienne des espaces linéaires S_k , il faut que le nombre $D = (r - k)(k + 1) - \binom{n + k}{k}$ soit positif ou nul. Cette condition est aussi suffisante et alors D est la dimension de l'ensemble des S_k de l'hypersurface, à l'exception seulement du cas $n = 2$, $\frac{3k + 2}{2} \leq r \leq 2k$, dans lequel l'hyperquadrique ne contient pas d'espace linéaire S_k même pour $D \geq 0$.

P. Dubreil (Nancy).

Morin, U.: *Sulla unirazionalità delle ipersuperficie algebriche del quarto ordine.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 191—194 (1936).

On sait que l'hypersurface cubique générale d'un espace linéaire S_r est unirationnelle. L'auteur établit que l'hypersurface générale F du quatrième ordre d'un espace S_r est également unirationnelle pour $r \geq 7$. Pour cela il part d'une propriété qui résulte de la Note précédente: pour $r \geq 7$, F contient des plans dont l'ensemble a la dimension $D = 3(r - 7)$.

P. Dubreil (Nancy).

Wong, B. C.: *Characteristics of birational transforms in S_r .* Bull. Amer. Math. Soc. 42, 888—894 (1936).

Für eine algebraische V_k^n eines Raumes S_r betrachtet Verf. folgende Charaktere: die Ordnungen b_t ($1 \leq t \leq k$) und j_t ($2 \leq t \leq k$) der Doppel- und der Kuspidualmannigfaltigkeiten, die bei den Projektionen von V_k^n auf Räume S_{k+t} entstehen, und die Klassen m_q ($1 \leq q \leq k$) der Schnittmannigfaltigkeiten von V_k^n mit Räumen S_{r-k+q} . Wenn V_k^n der vollständige Schnitt von $r - k$ Hyperflächen ist, so haben b_t, j_t, m_q bekannte Werte; hier werden ihre Werte im Falle bestimmt, wo V_k^n aus dem vollständigen Durchschnitt Φ_k^v von $q - k$ Hyperflächen eines Raumes S_o durch eine birationale Transformation entsteht, die auf Φ_k^v keinen Fundamentalpunkt besitzt. Es werden zunächst die m_q und dann die j_t ausgerechnet; zur Bestimmung der b_t dient eine rekurrierende Formel zwischen b_t, b_{t-1}, j_t .

E. G. Togliatti (Genova).

Segre, B.: *Invarianti topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 195—200 (1936).

Man betrachtet eine reguläre Transformation T einer V_n in sich selbst; es seien $x'_i = x'_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die Gleichungen von T , und O ein Fixpunkt von T , wo die Jacobische Determinante jener Gleichungen von Null verschieden sei; die von O ausgehenden Richtungen werden von T kollinear transformiert; diese Homographie ist

nicht ausgeartet, und die Wurzeln λ_i ihrer charakteristischen Gleichung (die man erhält, indem man allen Elementen der Hauptdiagonale der in O berechneten Jacobi'schen Determinante der Transformation eine Unbekannte λ substrahiert) liefern n topologische Invarianten von T in der Umgebung 1. Ordnung von O . Die Verhältnisse der λ_i können bekanntlich als Doppelverhältnisse ausgedrückt werden und sind absolute Invarianten von T im Punkte O . Die Wurzeln λ_i werden Dilatationskoeffizienten von T für die entsprechenden von O ausgehenden Fixrichtungen genannt. Es werden einige einfache geometrische Deutungen der Wurzeln λ_i angegeben; z. B. die folgende: Man kann zunächst, ohne Einschränkungen, V_n auf einen projektiven S_n abbilden; dann werden zwei Transformationen T, Θ als in der Umgebung von O äquivalent bezeichnet, wenn sie beide O als Fixpunkt besitzen und wenn $T\Theta^{-1}$ jede Richtung durch O in sich selbst transformiert, so daß der entsprechende Dilatationskoeffizient den Wert 1 besitzt; es gibt nun eine einzige Homographie, die mit T in der Umgebung von O äquivalent ist und die eine beliebige nicht durch O hindurchgehende Hyperebene ω als Fixhyperebene besitzt; die n absoluten Invarianten dieser Homographie hängen von ω nicht ab und liefern die n Wurzeln λ_i . — Verschiedene Anwendungen folgen; darunter einige schon bekannte Invarianten: die topologischen Invarianten 1. Ordnung für ein gemeinsames Paar entsprechender Punkte von zwei Transformationen zwischen V_n und V'_n ; insbesondere das Verhältnis der Dichten von zwei dualistischen Transformationen; die projektiven Berührungsinvarianten von zwei Hyperflächen in einem Berührungspunkt O ; eine geometrische Deutung einer projektiven Invariante einer Strahlenkongruenz des Raumes S_3 , die E. Waelsch, P. Buzzano, E. Bompiani, A. Terracini schon betrachtet haben. *E. G. Togliatti.*

Segre, B.: Un complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 201—205 (1936).

Segre, B.: Complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza con punti uniti di molteplicità qualsiasi. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 250—257 (1936).

I. Auf einer algebraischen Kurve C ist eine (α, β) -Korrespondenz T mit der Wertigkeit Null und mit lauter getrennten Doppelpunkten gegeben. Man kann annehmen, daß C eine ebene Kurve $f(x, y) = 0$ ist und daß T durch die einzige Gleichung $\theta(x, y, XY) = 0$ dargestellt wird. Es sei U ein Fixpunkt von T ; wenn auf der Kurve C die Ergebnisse der vorigen Abhandlung desselben Verf. (vgl. vorst. Ref.) angewendet werden, kann man einen Dilatationskoeffizienten κ von T im Punkte U definieren. Um den Wert von κ zu finden, kann man an Stelle der Veränderlichen y und Y in der Gleichung $\theta = 0$ die algebraische Funktion von x (oder X), die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definiert wird, einsetzen; dann entwickelt man die so entstehende $\theta[x, y(x); X, Y(X)]$ in eine doppelte Potenzreihe von $x - x_0$ und $X - X_0$, wo $x_0 = X_0$ dem Fixpunkt U entspricht, um schließlich den Wert von $\frac{dX}{dx}$ im Punkte U zu berechnen. In dieser Rechnung muß man die festen Schnittpunkte der Kurven $f = 0, \theta = 0$ bei festen x, y (oder X, Y) besonders berücksichtigen. Wenn man nun $F = f(XY)$ setzt, die rationale Funktion $R(xy) = \left[\frac{\partial(\theta F)}{\partial(XY)} : (\theta F_Y') \right]_{x=x, y=y}$ betrachtet und ihre Residuensumme gleich Null setzt, so erhält man die bemerkenswerte Formel $\sum \frac{1}{1-\kappa} = \beta$. Eine ähnliche Formel hat man für die Korrespondenz T^{-1} .

Im Falle einer involutorischen T ist $\kappa = -1$ und die Formel evident. — II. Auf einer Kurve L wird zunächst für jeden einfachen oder mehrfachen Fixpunkt U einer nichtidentischen Korrespondenz T ein geometrischer Charakter ω eingeführt, der als Residuum bezeichnet wird. Man setzt voraus, daß die Punkte von L den Werten eines Parameters x eineindeutig entsprechen, wenigstens in einer geeignet

kleinen Umgebung von $x = x_0$; und daß T durch eine Gleichung $\theta(x, X) = 0$ zwischen den Parameterwerten x, X von zwei entsprechenden Punkten dargestellt wird; für $x = x_0$ hat T einen n -fachen Fixpunkt, so daß $\theta(x_0, x_0) = 0$ und auch $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X}\right)^i \theta_0 = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X}\right)^n \theta_0 \neq 0$. Man setzt auch voraus, daß die betrachteten Funktionen kontinuierliche Ableitungen der Ordnung $2n-1$ besitzen. Der analytische Ausdruck von ω , der als Definition von ω selbst angenommen wird ist ziemlich kompliziert und kann hier nicht angegeben werden; er gestattet aber durch Rechnungen zu zeigen, daß ω eine Invariante für die regulären topologischen Transformationen von L ist. Wenn U ein einfacher Fixpunkt von T ist, so ist $\omega = \frac{1}{1-\kappa}$.

Und wenn ω^* das Residuum von U für T^{-1} ist, so ist $\omega + \omega^*$ gleich der Multiplizität n von U für T . — Werden L und T als analytisch und regulär angenommen, so ist ω das Residuum im Punkte U der Funktion $\varphi(x) = \left[\frac{\partial}{\partial X} \log \theta(x, X)\right]_{X=x}$. Es folgt, daß ω in jedem Punkt von L , der kein Fixpunkt von T ist, den Wert Null hat; und daß die Summe der Werte von ω für zwei Korrespondenzen T_1, T_2 gleich dem Wert von ω für die Korrespondenz $T_1 + T_2$ ist. Und wenn T eine kontinuierliche Schar T_t von Transformationen $\theta(x, X; t) = 0$ beschreibt und sich einer Grenzlage T nähert, wo ein Fixpunkt U als Grenzlage gewisser Fixpunkte $U_1 U_2 \dots U_m$ erscheint, so ist der Grenzwert der Summe der Residuen von T_t in den Punkten $U_1 U_2 \dots U_m$ gleich dem Residuum von T in U . — Die Ausdehnung des Satzes des 1. Teils ist jetzt unmittelbar, wenn für die dort betrachtete Korrespondenz T mit der Wertigkeit Null beliebige mehrfache Fixpunkte angenommen werden; man hat nur T als Grenzlage einer veränderlichen T_t mit lauter einfachen Fixpunkten zu betrachten. Man hat also jedenfalls die Formel $\sum \omega = \beta$. Die weitere Ausdehnung zu einer Korrespondenz T mit der Wertigkeit γ liefert die allgemeinere Formel $\sum \omega = \beta + \gamma p$, wo p das Geschlecht von L bedeutet; man beweist sie leicht, wenn man zur Korrespondenz T eine Reihe anderer geeignet gewählter elementarer Korrespondenzen addiert, für welche der Satz gültig ist, so daß die neu entstehende Summenkorrespondenz die Wertigkeit Null hat.

E. G. Togliatti (Genova).

Fano, Gino: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* Mem. Accad. Ital. 8, 23—64 (1937).

Eine vorläufige Mitteilung der Ergebnisse dieser Abhandlung ist schon erschienen (dies. Zbl. 15, 123); Zweck der Abhandlung ist die Untersuchung im allgemeinen der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Schnittkurven kanonische Kurven sind; ein Gegenstand, dem derselbe Verf. auch andere Arbeiten gewidmet hat (Atti Congr. Intern. Bologna 4, 115; Scritti matematici offerti a L. Berzolari 1937, 329), in welchen allgemeine Vermutungen ausgesprochen oder besondere Fälle diskutiert werden. Bedeutet p das Geschlecht jener Schnittkurven, so handelt es sich um Mannigfaltigkeiten M_3^{2p-2} eines Raumes S_{p+1} ; ihre Schnittflächen F^{2p-2} gehören zu einer bekannten Art von Flächen, deren Geschlechter alle den Wert 1 haben ($p_a = p_g = P = 1$), sie hängen von 19 Moduln ab. — Erstens einige vorbereitende Sätze: a) Wenn eine Schnittkurve von M_3 eine q_3^1 enthält, so gilt dasselbe für jede Schnittkurve, und M_3 enthält ein Büschel von Flächen 3. Ordnung; dieser Satz findet sich in der zweiten der oben zitierten Arbeiten; die betreffenden M_3 werden zunächst ausgeschlossen; b) wenn M_3 ∞^2 Geraden enthält, so verteilen sich diese auf einer endlichen Anzahl von Ebenen; c) auf einer Fläche F^{2p-2} mit kanonischen Schnittkurven, zwei irreduzible Kurven, die zusammen eine hyperebene Schnittkurve bilden, sind normal und nicht spezial; und wenn die eine Kurve nicht normal ist, so besitzen die Kurven des von der anderen definierten Linearsystems einen festen rationalen Bestandteil oder zerfallen in $k > 1$ elliptische Kurven; d) wenn das Linearsystem $|F^{2p-2}|$ der Schnittflächen der M_3 die Summe zweier irreduzibler Systeme ist, so schneiden diese beide

auf F^{2p-2} vollständige und aus normalen Kurven bestehende Kurvensysteme; e) wenn schließlich $|F^{2p-2}|$ die Summe von zwei irreduziblen und nichtfundamentalen Systemen ist, so bestehen diese beiden aus rationalen Flächen, die sich gegenseitig in elliptischen Kurven durchschneiden. — Alles das vorangeschickt, wird eine Klassifikation der gesuchten M_3 auf der Betrachtung der verschiedenen möglichen Arten ihrer Schnittflächen F^{2p-2} begründet. Eine solche Fläche wird von der 1. Art genannt, wenn sie von 19 Moduln abhängt und wenn die Minimalbasis ihrer Kurven aus einer hyper-ebenen Schnittkurve besteht, so daß sie nur das System der hyper-ebenen Schnittkurven und ihre Mehrfachsysteme enthält; von der 2. Art, wenn sie von 19 Moduln noch abhängt und wenn jene Minimalbasis aus einem Unterteiler der hyper-ebenen Schnittkurven besteht; von der 3. Art, wenn die hyper-ebenen Schnittkurven die Form $\sum k_i \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) besitzen, wo γ_i gewisse $m \geq 2$ Kurven und die k_i relative Primzahlen ≥ 2 sind, und wenn sie der 1. oder 2. Art nicht angehört (sie hängt dann von einer Anzahl ≤ 18 Moduln ab). Für eine F^{2p-2} der 1. Art ist es eine einfache Bedingung, eine Gerade zu enthalten, so daß eine M_3 , deren Schnittflächen von der 1. Art sind, eine Regelfläche R immer enthält; es gibt aber einen Charakter dieser Regelfläche R , d. h. die Maximalanzahl μ_0 der Erzeugenden von R , die, für ein gegebenes p , eine Erzeugende von R selbst treffen, der für ein wachsendes p abnehmende Werte annimmt, so daß, wenn $p > 23$ ist, M_3 keine Regelfläche mehr enthält (einzelne Ebenen ausgeschlossen) oder eine Projektion einer solchen ist. Man gewinnt so ein Mittel zur Bestimmung aller M_3 , die den größten Werten von p entsprechen. Auf einer M_3 , deren Schnittflächen der 2. Art angehören, gibt es ein System $|\Gamma|$, so daß $|F^{2p-2}| = |k\Gamma|$ mit $k > 1$ ist; die Flächen Γ sind rational, wenigstens ∞^3 , und ihre Schnittkurven sind elliptisch oder rational, je nachdem $k = 2$ oder $k > 2$ ist; und alles das genügt zur vollständigen Aufzählung dieser M_3 ; sie enthalten keine Gerade; und man findet $p \leq 37$; grundlegend sind hier die Ergebnisse von F. Enriques über lineare Flächensysteme mit rationalen oder elliptischen Schnittkurven. Ähnliche Über-rachtungen genügen auch zur Bestimmung der M_3 mit Schnittflächen der 3. Art; die Aufzählung und Beschreibung der verschiedenen Fälle ist jetzt aber viel länger; hier auch findet man $p \leq 37$. — Die Bestimmung aller, bis jetzt ausgeschlossenen, M_3 , die ein F^3 -Büschel enthalten, ist für $p \leq 7$ in der zweiten anfangs genannten Ab-handlung enthalten und wird hier für $p > 7$ vervollständigt; M_3 liegt jetzt auf einer rationalen normalen V_4^{p-2} , Ort von $\infty^1 S_3$; man findet jetzt $p \leq 10$. — Die gesuch-ten M_3 existieren also nur für $p \leq 37$; für $p = 37$ hat man zwei verschiedene M_3^2 eines S_{38} ; sie sind beide rational; ihre Abbildungssysteme auf einem Raum S_3 be- stehen aus Flächen F^6 mit einem 4fachen Punkt, dem ein doppelter Kegelschnitt unendlich nahe ist, und aus Flächen F^{12} mit einem 10fachen Punkt und einer kompli-zierten 3fachen Gerade. Die anderen gefundenen M_3 hier zu beschreiben ist nicht möglich. — Wichtig ist die Frage der Rationalität der betrachteten M_3 . Enthält M_3 eine Ebene, aber keinen F^3 -Büschel, so ist sie rational, sobald $p > 6$ ist; enthält M_3 einen F^3 -Büschel, so ist sie rational, wenn $p > 7$ ist; es folgt daraus, daß eine M_3 , die eine Regelfläche R enthält, rational ist, sobald $p > 10$ ist. Auch die übrigen M_3 sind für $p > 10$ rational, den einzigen Fall $p = 13$ ausgeschlossen, wo die Rationalität zweifelhaft aber sehr unwahrscheinlich bleibt; in diesem Falle handelt es sich um eine M_3 , die auf der allgemeinen M_3^2 des Raumes S_4 durch das System der Quadrikschnittkurven abgebildet wird. Für $p > 10$, den Fall $p = 13$ ausgeschlossen, hat man also lauter rationale M_3 .

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Decuyper, Marcel: Sur le problème du regroupement d'une famille donnée de bandes d'éléments de contact. Bull. Sci. math., II. s. 60, 355—367 (1936).

Soit S une surface dans l'espace euclidien ordinaire et soit F une famille de ∞^1 courbes tracées sur S . Si l'on imprime à chaque courbe de F un déplacement variant

de façon continue d'une courbe à l'autre les courbes déplacées engendrent une surface \bar{S} . Egoroff a étudié le cas où les développables constituées par les plans tangents à S et \bar{S} le long de deux courbes F correspondantes quelconques se superposent quand on superpose ces deux courbes. Dans ce cas on dit que, la surface \bar{S} a été obtenue par un regroupement des courbes F . Dans le présent travail l'auteur établit des différents compléments à la théorie d'Egoroff. Il montre par ex. qu'une surface S , enveloppe de ∞^1 sphères dont les coordonnées du centre et le rayon sont des fonctions d'un paramètre, possède une famille F de cercles admettant un regroupement et il détermine toutes les surfaces \bar{S} correspondantes. Une étude détaillée concerne certains cas où la famille F jouit des propriétés particulières; par ex. le cas où les courbes F ont pour images, dans la représentation sphérique, une famille de grands cercles. O. Borůvka.

Knothe, Herbert: Zur differentiellen Liniengeometrie im R_n . Deutsche Math. 1, 881—891 (1936).

Aufbauend auf eine frühere Arbeit (Deutsche Math. 1, 63—70; dies. Zbl. 13, 128) bestimmt Verf. im § 1 ein vollständiges System von Invarianten 1. Ordnung einer $(n-1)$ -dimensionalen Geradenmannigfaltigkeit G_{n-1} im R_n . Im § 2 wird gezeigt, daß jede isotrope G_{n-2} im allgemeinen in einer isotropen G_{n-1} enthalten ist; dabei bedeutet isotrop, daß alle durch eine Gerade gehenden Regelflächen der Mannigfaltigkeit auf der Geraden den gleichen Kehlpunkt haben. Im § 3 wird jeder G_{n-2} eine andere G_{n-2} adjungiert (eine Gerade der G_{n-2} liegt in der Hyperebene, die im Mittelpunkt die zugeordnete Gerade der G_{n-2} senkrecht schneidet). Unter gewissen Einschränkungen gilt für $n=4$ der Satz: Sind G_2 und \bar{G}_2 gleichzeitig isotrop, so sind die sphärischen Bilder Minimalflächen des elliptischen Raumes der Einheitskugel des R_4 . — Im letzten Paragraphen werden die Grundlagen für eine Theorie der Komplexe von ∞^n Geraden (G_n) im R_n entworfen. Ein Komplexstrahl wird gegeben durch einen Einheitsvektor (η) und einen Leitpunkt (x). Da für (η) nur eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit zur Verfügung steht, gibt es durch jede Gerade des Komplexes eine Fortschrittingsrichtung, längs der η fest bleibt. (Das entspricht dem Zylinder des G_3 im R_3 .) Ein Parameter wird nun von vornherein so gewählt, daß er in diese ausgezeichnete Richtung fällt. Für die übrigen $(n-1)$ Parameter wird ein „Quasitensorkalkül“ entwickelt, dem das Bogenelement des sphärischen Bildes als Grundform dient.

Haack (Berlin-Charlottenburg).

Sasaki, Shigeo: Some theorems on conformal transformations of Riemannian spaces. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 572—578 (1936).

A Riemannian manifold V_m undergoes a conformal transformation defined by

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} a_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m,$$

where $a_{\alpha\beta}$ is the fundamental tensor and σ a scalar function. The author studies some properties of a Riemannian manifold V_n ($n < m$), imbedded in this V_m , and invariant under this transformation. He finds some results due to Schouten and Struik, C. R. 176, 1597—1600 (1923), and some new results, e.g. that the "third fundamental vectors" $\mu_{\omega\tau|j}$ ($\tau, \omega = n+1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, see Eisenhart, Riemannian Geometry, p. 160) are invariant, further some properties of umbilical V_n and of congruences in the V_m . These results should be compared with those of D. Perepelkine, C. R. 200, 513 (1935); this Zbl. 10, 419.

Struik (Cambridge).

Castoldi, Luigi: Estensione ai „Vettori generalizzati“ di una formula dell'ordinaria analisi vettoriale. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 219—221 (1936).

Die Größe $V^\mu V_{[\mu} T_{\lambda_1 \dots \lambda_m]}$ wird für den m -Vektor $T_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ ($m < n$) mittels $V^\mu V_\mu T_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ und $V^\mu V_{[\lambda_1} T_{\lambda_2 \dots \lambda_{m-1}]\mu}$ ausgedrückt und der Fall $m=1$ an die Maxwell'schen Gleichungen angewandt.

Hlavatý (Praha).

Topologie :

MacLane, Saunders: A combinatorial condition for planar graphs. *Fundam. Math.* **28**, 22—32 (1937).

Es wird nachgewiesen, daß die folgenden drei Aussagen über endliche, kombinatorische Graphen G untereinander äquivalent sind: 1. G ist einem in der Ebene liegenden topologischen Graphen isomorph [vgl. C. Kuratowski, *Fundam. Math.* **15**, 271—283 (1930)]. 2. Es existiert ein zu G dualer Graph [vgl. H. Whitney, *Trans. Amer. Math. Soc.* **34**, 339—362 (1932); dies. Zbl. **4**, 131]. 3. Es existiert in G eine Menge einfacher, geschlossener Polygone C_i derart, daß a) diese C_i eine größte mod 2 unabhängige Menge in G bilden und b) keine Kante von G in mehr als zwei der C_i auftritt. *Baer.*

Alexandroff, P.: Einige Problemstellungen in der mengentheoretischen Topologie. *Rec. math. Moscou, N. s.* **1**, 619—634 (1936).

Die Probleme, um die es sich in diesem Vortrage handelt, mögen etwa in die folgenden Gruppen eingeteilt werden: 1. Dimensionstheorie, 2. der Mannigfaltigkeitsbegriff in der mengentheoretischen Topologie und die lokalen Eigenschaften, 3. diskrete Räume und Elimination der Polyeder, 4. Homologietheorie der nichtkompakten Räume, 5. allgemeine Räume. — Jeder dieser Gruppen von Problemen ist ein Paragraph dieses Artikels gewidmet.

Autoreferat.

Besicovitch, A. S.: A problem on topological transformation of the plane. *Fundam. Math.* **28**, 61—65 (1937).

In answer to a question proposed by S. Ulam, the author constructs a topological transformation S of a plane P into a plane P' having the property that the consecutive images SM, S^2M, S^3M, \dots of a point M form a set everywhere dense on the plane P' . In fact, in the author's example, this conclusion holds for every point M of P except the origin.

G. T. Whyburn (Virginia).

Franz, Wolfgang: Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion. *J. reine angew. Math.* **176**, 113—124 (1936).

Let \mathfrak{U} be an overlay (Überdeckung [Reidemeister, *J. reine angew. Math.* **173**, 164—173 (1935); this Zbl. **12**, 126]) of an n -complex relative to the integers in an algebraic number field K . The boundary matrices R_k ($k = 0, \dots, n-1$) satisfy the relations $R_k R_{k-1} = 0$ and their elements are integers in K . The author obtains a complete set of invariants of the system of R 's relative to the operations of transformation and extension. (Transformation is the replacement of each R_k by $T_{k+1}^{-1} R_k T_k$, the T 's being unimodular matrices with integral elements in K . Extension is the addition of an extra row and an extra column to an arbitrary R_k , the new row and column consisting of zeros except for their intersection which is 1. Quantities which are invariant under these operations are invariant under the operation of cellular subdivision performed on \mathfrak{U} .) The invariants which form a complete set are; the Betti numbers p_k , and in case these are all 0, the torsion T [Franz, *J. reine angew. Math.* **173**, 245—254 (1935); this Zbl. **12**, 127], certain elementary divisors (torsion ideals) $[e_k]$ and the row- and column-classes (torsion classes) $\mathfrak{S}_k, \mathfrak{Z}_k$ as defined by Steinitz [*Math. Ann.* **71**, 328—354 (1912)]. These invariants are not independent but satisfy certain relations which are stated explicitly. Suppose \mathfrak{U}^* is dual to \mathfrak{U} (Reidemeister, loc. cit.) \mathfrak{U} being defined relative to \bar{K} the field complex conjugate to K . If $\bar{K} = K$ and if \mathfrak{U}^* is equivalent to \mathfrak{U} by transformation and extension, then the following generalised Poincaré duality relations hold: $p_k = p_{n-k}$, $[e_k] = [e_{n-k-1}]$, $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{Z}_{n-k-1}$, $\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{S}_{n-k-1}$, and, except for factors which are units in K , $T\bar{T} = 1$ (n even), $T = \bar{T}$ (n odd).

Smith (New York).

Tucker, A. W.: Branched and folded coverings. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 859 bis 862 (1936).

Zwei elementare Formeln aus der Theorie der simplizialen Abbildungen von triangulierten Mannigfaltigkeiten. Es sei K_1^n auf K_2^n mit dem Grade d abgebildet;

ist s ein Simplex von K_1 , s' sein Bild, so sei $d(s)$ der Grad, mit dem der Stern um s den Stern um s' bedeckt; $e(s)$ sei $= d(s) - 1$ gesetzt, $K_{e,i}$, $i = 1, \dots, n_e$ seien die Komplexe — in Verf. verallgemeinertem Sinne — in die die Gesamtheit der Simplexe s mit $e(s) = e$ zerfällt. Wenn schließlich $x_{e,i}$ die Eulersche Charakteristik von $K_{e,i}$, x_1 bzw. x_2 die Eulersche Charakteristik von K_1 bzw. K_2 ist, so lautet die erste Formel: $x_1 + \sum_e \sum_i e x_{e,i} = d x_2$. Die zweite Formel liefert das analoge Resultat für nicht notwendig orientierbare Mannigfaltigkeiten. Die Mannigfaltigkeitsvoraussetzung kann in naheliegender Weise abgeschwächt werden. P. Alexandroff (Moskau).

Astronomie und Astrophysik.

Jefferies, Harold: On the figures of the earth and moon. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 3—15 (1936).

De Sitters Theorie der Figur der Erde ist verbesserungsbedürftig, weil sich die Annahme hydrostatischer Druckverteilung im Innern nicht halten läßt. Es wird daher die De Sittersche Rechnung in einigen Punkten verbessert und weitergeführt. Sogar Relativitätseffekte werden berücksichtigt. Die Elliptizität der Erdgestalt wird neu bestimmt, ebenso die numerischen Werte in der Formel für die Schwere in ihrer Abhängigkeit von der geozentrischen Breite. Die Abhängigkeit der Erdbewegung von der Bahn und der Gestalt des Mondes wird dazu benützt, ebenfalls die Gestalt und den Aufbau des Mondes zu diskutieren. A. Klose (Berlin).

Brown, Ernest W.: The stellar problem of three bodies: I. Application of satellite theory. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 56—61 (1936).

Wie beim Satellitenproblem ist in den meisten aus drei dynamisch gekoppelten Fixsternen bestehenden Systemen das eine Sternpaar sehr eng, die dritte Komponente dagegen steht weit ab. Die Delaunaysche Störungstheorie, in der Weiterentwicklung, die ihr E. W. Brown in seiner Mondtheorie gegeben hat, läßt sich daher auf dreifache Sternsysteme anwenden. Die Entwicklung wird von vornherein auf diejenigen Erscheinungen beschränkt, die der Beobachtung zugänglich sind. A. Klose (Berlin).

Brown, Ernest W.: The stellar problem of three bodies: II. The equations of motion with a simplified solution. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 62—66 (1936).

In dem I. Artikel war wesentlich vorausgesetzt worden, daß die Exzentrizitäten und Neigungen der Bahnen klein sind. E. W. Brown macht sich in dem II. Artikel von dieser Beschränkung frei. Er führt zu diesem Zweck vor allem als unabhängige Veränderliche an Stelle der Zeit die wahre Anomalie in die Theorie ein. A. Klose.

Lyttleton, Raymond A.: On the possible results of an encounter of Pluto with the Neptunian system. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 108—115 (1937).

Da der Perihelabstand von Pluto kleiner als die halbe große Achse der Neptunbahn ist und die Knotenlängen sich infolge der säkularen Störungen verschieben, dürften künftighin starke Annäherungen von Pluto an Neptun vorkommen und auch schon vorgekommen sein. Die Bahn des Pluto kann hierbei sehr starke Änderungen erleiden, aber es ist nicht möglich, daß Pluto dem Sonnensystem entkommt. Kommt hierbei Pluto dem Neptunmond Triton ganz besonders nahe (der eine Masse von der gleichen Größenordnung wie Pluto besitzt), so ist es möglich, daß Pluto Neptunmond wird und eine direkte Bahn bekommt. Dies ist allerdings sehr unwahrscheinlich. Trotzdem ist es möglich, daß ursprünglich Pluto ein zweiter Neptunmond war und durch eine sehr enge Begegnung mit Triton aus dem Neptunsystem hinausgeworfen wurde. Hierbei hätte dann Triton seine retrograde Bahn erhalten. G. Schrutka.

Glenn, Oliver E.: Theory of gravitation. The problem of stationary states, and the apparatus of the echo phenomenon in radiographic transmission. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **6**, 29—40 (1937).

An Stelle des Newtonschen Gravitationspotentials soll ein allgemeineres von der Form $P(r) = G(r)/r^5$ gesetzt werden, wo $G(r)$ ein Polynom in r ist. Der Grad dieses

Polynoms bestimmt sich aus der Forderung, daß eine vorgegebene Anzahl stabiler Bahnen möglich sein soll. Der Verf. glaubt, auf Grund dieser Hypothese das Auftreten von Heavyside-Schichten erklären zu können. *A. Klose (Berlin).*

Swings, P., and S. Chandrasekhar: On the distribution of the absorbing atoms in the reversing layers of stars and the formation of blended absorption lines. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 24—37 (1936).

In this paper a study is made of the distribution of absorbing atoms of specified ionization and excitation as a function of the optical thickness of the stellar atmosphere. A numerical investigation of the cases of H and O^+ in *B*-type stars and of Ca^+ and H in *A*-type stars is given. The differences of distribution are very conspicuous, and the effect of surface gravity turns out to be important. — The authors then study the conditions for radiative equilibrium in a sharply stratified atmosphere, and develop a formula for the corresponding absorption line intensities. This formula is then applied to the explanation of the measurements by Swings and Struve who found, that absorption lines appearing in the wings of other lines have peculiar intensities which cannot be accounted for by the usual formulae. The new formula successfully interpretes these measurements when certain assumptions are introduced which roughly speaking would mean that the distribution of absorbing atoms is similar to that of a sharp stratification. — The problem discussed in this paper is of importance in connection with problems of spectral classification and dissociative equilibria of molecular compounds.

Steensholt (Princeton, N. J.).

Minkowski, R.: Note on the motion of masses of gas near novae. *Astrophys. J.* **85**, 18—25 (1937).

Some of the spectral changes in a nova are usually interpreted on the hypothesis of a thin expanding shell of gas thrown off by the star, its initial acceleration being supposed due to radiation pressure, and its subsequent retardation to the star's gravitational attraction. The author examines these explanations quantitatively. On the simplifying assumption that the shell consists of hydrogen only, and estimating the total absorption produced by it, he gets for its mass in a typical case 10^{-8} to 10^{-6} solar masses. He then finds that a mass of this order could in fact experience an outward acceleration of the order observed, due to radiation pressure from radiation above the limit of the Lyman series, with a reasonable value of the surface temperature of the central star producing this radiation. However, in order to produce the retardation that has been observed in later stages in the case of a number of novae, he finds that the star would have to have an improbably high mass. If therefore the hypothesis of the expanding shell is to be retained, some force other than gravity must be effective at this stage. Electrostatic forces are shown to be improbable. Magnetic forces could have an effect only if the atoms are electrically charged and have sufficiently long free paths. The author estimates, from the low pressures required for the appearance of forbidden lines, as observed, that a magnetic field of about 10^{-3} gauss would have an appreciable effect on the motions of the gases. But the difficulties may have to be resolved by supposing the observed motions to take place in an extended atmosphere, and not to belong to a thin shell. *McCrea.*

Sevin, Émile: Sur le rayonnement cosmique et les étoiles de la série principale. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 230—233 (1937).

The author finds that the frequencies associated with electron spin in his theory (this *Zbl.* **4**, 420) correspond to the energies of particles at temperatures of the supposed order of the central temperatures of stars of the main series, and that these energies, multiplied by the ratio of the mass of the proton to that of the electron, are of the order of Millikan's values for primary cosmic ray energies. *W. H. McCrea (Belfast).*

Hund, F.: Materie unter sehr hohen Drucken und Temperaturen. *Erg. exakt. Naturwiss.* **15**, 189—228 (1936).

The paper is a report on the properties of matter at very high temperatures and

pressures. The first part of it discusses the general equation of state of matter under such extreme physical conditions. The second part deals with conduction of electricity and heat, absorption of light, and transport of energy in an electron gas. The third part discusses briefly the astrophysical applications of the theory developed in the previous sections. *Steensholt* (Princeton, N. J.).

Quantentheorie.

Masurenko, D. N.: Über die Differentialbeziehungen zwischen den Diracschen Kugelfunktionen. *Physik. Z. Sowjetunion* **10**, 193—202 (1936).

Die Diracsche Gleichung kann im Falle eines zentralsymmetrischen Kraftfeldes unter Einführung von Polarkoordinaten ebenso allgemein separiert werden wie die spinfreie Schrödingergleichung. An Stelle der gewöhnlichen Kugelfunktionen ergibt sich jedoch dabei ein halbzahliges Analogon derselben. Diese Winkelfunktionen werden genauer studiert; es zeigen sich verschiedene einfache Relationen, die den bekannten Relationen bei gewöhnlichen Kugelfunktionen analog sind. *P. Jordan*.

Donder, Th. de, et J. Géhéniau: Le modèle électronique de la mécanique ondulatoire de Dirac. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 1238—1240 (1936).

Die Note enthält Betrachtungen über relativistische Wellenmechanik. *O. Klein*.

Datzeff, Assène: Mécanique quantique relativiste de l'électron. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 1240—1242 (1936).

Es wird die Beziehung der quantentheoretischen, relativistischen Behandlung des Elektrons zur gewöhnlichen Relativitätsmechanik betrachtet. *O. Klein*.

Kakinuma, Usaku: Use of a complex Riemannian geometry in the theory of electron. *Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res.* **30**, 83—98 (1936).

Es wird eine komplexe Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie entwickelt unter Linearisierung des Linienelements mittels der Diracschen Matrizen α_k :

$$ds_k = \alpha_k \lambda_\mu^k dx^\mu.$$

Nach ausführlicher Untersuchung von semikovarianter Differentiation, komplexer Riemannscher Verschiebung, Krümmungstensor, Feldgleichungen, Aktionsprinzip wird die Diracsche Wellengleichung des Elektrons allgemeinrelativistisch formuliert und geometrisch eingeordnet. *P. Jordan* (Rostock).

Pauli, W.: Théorie quantique relativiste des particules obéissant à la statistique de Einstein-Bose. *Ann. Inst. H. Poincaré* **6**, 137—152 (1936).

Die Arbeit gibt eine ausführliche Darstellung der Pauli-Weisskopfschen Theorie von elektrischen Teilchen ohne Spin (vgl. dies. Zbl. **10**, 135), wobei besonders gezeigt wird, daß sich in diesem Fall die symmetrische vor der antisymmetrischen Statistik durch größere Einfachheit auszeichnet. *O. Klein* (Stockholm).

Wataghin, G.: Sopra una possibilità di rendere convergenti alcuni risultati della meccanica quantica. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* **2**, 517—519 (1936).

In der Diracschen gemischten Dichte werden die Terme hoher Energie, d. h. kurzer Wellenlänge, durch Hinzufügen eines Konvergenz erzeugenden Faktors in relativistisch invarianter Weise abgeschnitten, um die bekannten Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik (unendliche Selbstenergie) zu vermeiden. *S. Flüge* (Leipzig).

Kahan, Théodore: Sur la théorie du deuteron; interaction proton-neutron d'allure exponentielle. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 414—416 (1937).

Die Stärke von Majoranakraft und Heisenbergkraft werden aus der Lage des 1S -Terms des Deuterons ausgerechnet. Als Kraftgesetz wird dabei $J(r) = -Ve^{-ar}$ gewählt, da hierfür die Schrödingergleichung exakt lösbar ist. Ein ausführlicher Bericht an anderer Stelle wird angekündigt. *S. Flüge* (Leipzig).

Kemmer, N.: Zur Theorie der Neutron-Proton-Wechselwirkung. *Helv. physica Acta* **10**, 47—67 (1937).

Es wird versucht, die Neutron-Proton-Wechselwirkung mit einer relativistisch

invarianten Wellengleichung zu beschreiben, die den Spin der Teilchen in konsequenter Weise berücksichtigt. Es ist nur dann ein invarianter Ansatz möglich, wenn die Wechselwirkung δ -Funktion-Charakter hat. Für Potentialfunktionen mit endlicher Reichweite läßt sich aber näherungsweise die Relativitätskorrektur abschätzen und der Einfluß des Spins berechnen. Diese Korrekturen sind jedoch bei der üblich angenommenen Reichweite der Wechselwirkung sehr klein und werden nur bei dem Übergang zu sehr kurzen Reichweiten beträchtlich, so daß die unrelativistischen Rechnungen von L. H. Thomas [Physic. Rev. **47**, 903 (1935); dies. Zbl. **11**, 427] über die Unverträglichkeit einer kurzreichenden Kraft mit der Erfahrung nicht mehr beweiskräftig sind. Jedoch ist die Annahme einer normierbaren δ -Funktion als Potential bereits mit einer endlichen Bindungsenergie des Deuterons unvereinbar. *Weisskopf*.

Géhéniau, Jules: Production d'ondes électromagnétiques au moyen de neutrinos. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 235—237 (1937).

Aus zwei ebenen monochromatischen Neutrinowellen φ, Φ gleicher Fortschreitungsrichtung kann man — die bekannte Tatsache benutzend, daß aus zwei Spinoren φ, Φ ein in ihnen bilinearer Sechservektor gebildet werden kann — eine den Maxwell'schen Gleichungen genügende ebene Welle lorentzinvariant konstruieren. — Dies Resultat kommt auch in den von Kronig im Anschluß an die vom Ref. begründete Form der Neutrinotheorie des Lichtes ausgeführten Untersuchungen vor, ist aber nach Kronig nicht ausreichend, um die von letzterem Verf. anderweitig erzielte lorentzinvariante Verknüpfung zwischen Neutrino- und Lichtfeld zu erhalten. *P. Jordan*.

Born, Max: Wave mechanics of couples (neutron-neutrino). Nature **139**, 68 (1937).

Die Dirac'sche Theorie eines spinbegabten Einzelteilchens wird verallgemeinert zu einer ähnlichen Theorie von Teilchenpaaren zwecks Anwendung auf den β -Prozeß. Mit Dirac-Matrizen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ setzt der Verf.:

$$\Omega = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 + A_0 \sum_k \Gamma_k P_k + \lambda_0 \sum_k \gamma_k p_k + \lambda_0 A_0 \sum_{kl}' i \gamma_k \gamma_l (p_k P_l - p_l P_k);$$

p_k, P_k sind die Impulsvektoren der beiden Teilchen. Es wird dann (λ_0, A_0 sind c -Zahlen!):

$$\Omega^2 = \lambda_0^2 \sum_k p_k^2 + A_0^2 \sum_k P_k^2 + \lambda_0^2 A_0^2 \sum_{kl} (p_k P_l - p_l P_k)^2 + 1.$$

Mit diesem Ω wird die Wellengleichung des kräftefreien Falles in der Form

$$\Omega \Psi = 0$$

angesetzt, wo Ψ von den 8 Raum-Zeit-Koordinaten x_k, X_k beider Teilchen abhängt. — Der Verf. gibt an, daß die (offenbar leicht hinzuschreibende) Verallgemeinerung für Anwesenheit von Kräften in einheitlicher Weise elektromagnetische sowie Kern-Kraft-Wechselwirkungen liefert. Die Einführung einer 4komponentigen (statt 16komponentigen) Wellenfunktion Ψ bedeutet aber offenbar eine wesentliche Abänderung gegenüber der bislang angenommenen Theorie. *P. Jordan* (Rostock).

Born, Max, and N. S. Nagendra Nath: The neutrino theory of light. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **4**, 611—620 (1936).

Im Anschluß an die früheren Arbeiten der Verff. über die Neutrinotheorie des Lichtes (Jordan-Kronig) wird die Rolle des Spins des Neutrino in dieser Theorie ausführlich untersucht. I. s. dies. Zbl. **13**, 427. *P. Jordan* (Rostock).

Fock, V.: Über die Unmöglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichtes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 229—231 (1936).

Die Unmöglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichts wird aus dem Umstand gefolgert, daß die Wellenfunktionen sowohl des Lichts wie der Neutrinos dem Superpositionsprinzip genügen müssen, während die verschiedene Statistik eine lineare Beziehung zwischen diesen Größen auszuschließen scheint. Außerdem wird ein mathematischer Einwand gegen die Jordan-Kronigsche Neutrinotheorie erhoben. *O. Klein*.

Kishen, Jai, and N. K. Saha: On the laws of distribution of velocities of particles undergoing emission and absorption in a radiation-field. *Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci.* **10**, 413—419 (1936).

Anknüpfend an die Einstein-Milneschen Untersuchungen betreffs des statistischen Gleichgewichts zwischen einem Planckschen Strahlungsfeld und der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung Strahlung absorbierender und emittierender Atome wird gezeigt, daß statt der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung die Fermische bzw. Bose-Einsteinsche das Gleichgewicht ergibt, wenn es sich um Teilchen mit antisymmetrischen Eigenfunktionen handelt. — Dies war jedoch schon durch ältere Untersuchungen klargestellt.

P. Jordan (Rostock).

● **Feather, N.:** An introduction to nuclear physics. Cambridge: Univ. press 1936. X, 213 pag., 21 fig. a. 3 plat. bound 10/6.

In diesem Buch wird eine Übersicht über die Erscheinungen der Kernphysik gegeben. Der Stoff ist wie folgt gegliedert: I. Grundlagen. Experimentelle Methoden zur Untersuchung der Kerneigenschaften, klassische und quantentheoretische Begriffsbildungen zur Deutung dieser Eigenschaften, Kernbausteine und ihre Wechselwirkung. II. Eigenschaften stabiler Kerne. Kernladung, Kernmasse, mechanische und magnetische Kernmomente. III. Eigenschaften instabiler Kerne. α -Zerfall, β -Zerfall, Aussendung von γ -Strahlen. IV. Kerntransformationen durch Beschießung mit schnellen Teilchen oder durch Strahlung. Transformationen durch α -Strahlen, Neutronen und beschleunigte Teilchen (Protonen, Deuteronen) mit Einfangung oder verschiedenen Zertrümmerungsprodukten, photoelektrische Dissoziation. Die experimentelle Seite des behandelten Gegenstands ist stark betont, die theoretischen Betrachtungen sind rein „modellmäßig“, ohne Formeln, gehalten. Zahlreiche graphische Darstellungen und Tabellen sowie einige ausgezeichnete Wilsonaufnahmen erläutern den Text.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wigner, E.: On the consequences of the symmetry of the nuclear Hamiltonian on the spectroscopy of nuclei. *Physic. Rev.*, II. s. **51**, 106—119 (1937).

Verf. untersucht die Multipllettstruktur der Terme von Atomkernen. Dabei geht er zunächst von der Voraussetzung aus, daß die Hamiltonsche Funktion des Kerns nicht von der Spinkoordinaten abhängt und daß weiterhin die Kräfte zwischen allen Kernbestandteilen, Protonen und Neutronen, gleich sind. Es zeigt sich dabei, daß die Multipletts durch drei Quantenzahlen S , T , Y beschrieben werden statt der einen S , welche die Multipletts der Elektronenbewegung im Atom kennzeichnet. Die Theorie kann sodann verfeinert werden, indem man entweder die Spinkräfte berücksichtigt oder einen Unterschied in der Wechselwirkung verschiedenartiger Teilchenpaare zuläßt. Es ergeben sich dadurch Aufspaltungen der Multipletterme. Verf. wendet seine Resultate auf die leichteren Elemente an und deutet damit qualitativ mehrere Züge der Isotopentabelle.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wentzel, Gregor: Zur Theorie der β -Umwandlung und der Kernkräfte. I. *Z. Physik* **104**, 34—47 (1936).

In der Fermischen Theorie des β -Zerfalls wird der Übergang (Proton) \rightarrow (Neutron + Positron + Neutrino) als Elementarprozeß aufgefaßt. Verf. entwickelt eine Theorie, in der dieser Vorgang als Prozeß zweiter Ordnung aufgefaßt wird. Im Zwischenzustand treten dann Protonen und Neutronen mit ganzzahligem Spin auf. Hinsichtlich des β -Zerfalls leistet diese Auffassung ungefähr dasselbe wie die Fermische Theorie, die Folgerungen hinsichtlich der Kernkräfte sind aber verschieden. Es resultieren nämlich Kräfte zwischen Proton und Proton sowie zwischen Neutron und Neutron, die von der gleichen Größenordnung sind wie die Kräfte zwischen Proton und Neutron. *Casimir*.

Goldstein, L.: Sur la théorie de la désintégration radioactive alpha. *J. Physique Radium*, VII. s. **7**, 527—532 (1936).

Verf. versucht eine Theorie des α -Zerfalls zu entwickeln, bei der das α -Teilchen nicht als Punkt, sondern als kleine Kugel aufgefaßt wird. Dann resultieren Werte

für die effektiven Kernradien, die etwas verschieden sind von den Gamowschen. In qualitativer Hinsicht ergeben sich keine Änderungen. *Casimir (Leiden).*

Yamanouchi, Takahiko: On the calculation of atomic energy levels. IV. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 623—640 (1936).

Die gruppentheoretischen Überlegungen desselben Verf. zur Frage der Energiethermie eines Kernatoms (vgl. dies. Zbl. 13, 331) werden fortgesetzt und vereinfacht mit Hilfe der Diracschen Methode zur Behandlung des Vielelektronenproblems. *Klein.*

Vlasov, A., et V. Fursow: Théorie de la largeur des raies spectrales dans un gas homogène. (Largeur de couplage.) Ž. eksper. teoret. Fis. 6, 751—773 u. franz. Zusammenfassung 773 (1936) [Russisch].

Fursow, W., und A. Wlassow: Zur Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien in homogenem Gas. (Kopplungsbreite.) Physik. Z. Sowjetunion 10, 378—412 (1936).

Es werden die bestehenden Theorien der Verbreiterung der Spektrallinien im homogenen Gas einer Kritik unterzogen. Die Verff. meinen, diese Verbreiterung am besten dadurch berechnen zu können, daß sie die Energieabgabe eines angeregten Atoms an gleichartige unangeregte Atome der Umgebung berechnen und das dadurch bedingte stärkere Abklingen als Ursache der Verbreiterung ansehen. Die Berechnung wird klassisch und quantenmechanisch durchgeführt und führt im wesentlichen zum gleichen Resultat wie die bisherigen Theorien von Weisskopf (Physik. Z. 34, 1; dies. Zbl. 6, 88) und Lenz [Z. Physik 80, 423 (1933); dies. Zbl. 6, 138]. Es wird außerdem die Wirkung der ganz nahen Zusammenstöße diskutiert. Der Einfluß der Strahlung während des Stoßes auf Form und Breite der Linien wird qualitativ untersucht; er ergibt eine asymmetrische Verbreiterung. *V. Weisskopf (Kopenhagen).*

Mamotenko, M.: Das Problem der Aktivierungsenergie im Rahmen der Hund-Mullikenschen Theorie der Valenz. Ž. eksper. teoret. Fis. 6, 911—930 u. deutsch. Zusammenfassung 931 (1936) [Russisch].

Verf. macht den Versuch, ein Verständnis der Aktivierungsenergie nach dem Hund-Mullikenschen Schema der Moleküleigenfunktionen zu gewinnen. Am Beispiel von He_2 und H_3 wird gezeigt, daß dieses Schema in seiner einfachsten Form sogar für eine qualitative Beurteilung der Frage „Anziehung oder Abstoßung?“ unzureichend ist. Ferner wird die Aktivierungsenergie eines 3-Elektronen-Systems betrachtet, wobei die Elektronen in das Feld der Kerne sukzessive eingeführt werden: Auf jedes Elektron wirkt somit außer der Kernladung nur die verschmierte Ladung der vorhergehenden Elektronen. Dieses Verfahren wird auf das Li-Atom und auf das System $\text{H}_2 + \text{H}$ angewandt. Das letztere Beispiel zeigt, daß noch bei beträchtlichen Abständen zwischen Molekül und Ion die Austauschkräfte gegenüber den Polarisationskräften überwiegen. *V. Fock (Leningrad).*

Blochinzew, D.: Bemerkungen zur Phosphoreszenztheorie. Physik. Z. Sowjetunion 10, 424—426 (1936).

Für die Phosphoreszenz kommen nach Verf. die folgenden Ursachen in Betracht: 1. metastabile Zustände (spielen in Lenard-Phosphoren keine Rolle), 2. lokale Zustände der Elektronen und Löcher (Nichtüberlappen der Wellenfunktionen der Elektronen im angeregten und normalen Zustand). Die Wirkung dieser Ursachen wird kurz diskutiert. *V. Fock (Leningrad).*

Sze, S. Y.: Theory of the effect of thermal agitation on the reflection of X-rays by crystals. Chin. J. Physics 2, 124—127 (1936).

Ableitung der Formel für den Einfluß der Temperatur auf die Intensität der Röntgenreflexionen nach einer vereinfachten Methode. *R. de L. Kronig.*

Muto, Toshinosuke: The quantum theory of the electrical conductivity of alloys in the superlattice state. Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res. 30, 99—120 (1936).

Es wird die Theorie des Widerstandes von Legierungen infolge der ungeordneten Besetzung der Gitterpunkte mit verschiedenen Atomarten kombiniert mit der Bragg-

Williamsschen Theorie des Ordnungsgrades bei ganzzahligem Mischungsverhältnis. Es werden Formeln für die Abhängigkeit des Zusatzwiderstandes vom Ordnungsgrad für Cu_3Au entwickelt, die den experimentellen Resultaten gut angepaßt werden können.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Shockley, William: Energy bands for the face-centered lattice. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 129—135 (1937).

Im Anschluß an Slater [*Physic. Rev.* 45, 794 (1934)] werden die Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen in einem flächenzentrierten kubischen Gitter so durch eine Linearkombination von Atomeigenfunktionen (eine s -, drei p -, fünf d - und drei f -Funktionen) angenähert, daß die Schrödingergleichung in der Umgebung der Gitterpunkte erfüllt ist, die Übergangsbedingungen von einer solchen Umgebung zu den Umgebungen der benachbarten Gitterpunkte aber nur an den 12 Mitten nächster Verbindungslinien erfüllt sind. Die Abhängigkeit der Energie E von Wellenzahlvektor \mathbf{k} wird für eine Anzahl Geraden im \mathbf{k} -Raum berechnet und für kleine $|\mathbf{k}|$ allgemein angenähert, so daß eine qualitative Übersicht über $E(\mathbf{k})$ entsteht. *F. Hund* (Leipzig).

Landau, L.: Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung. *Physik. Z. Sowjetunion* 10, 154—164 (1936).

Es seien p_i bzw. p'_i die Impulskomponenten zweier zusammenstoßenden Teilchen, Δ_i bzw. Δ'_i deren Änderungen infolge des Stoßes, $n(p)$ die Anzahl der Teilchen mit dem Impuls p , $w = w(p, p', \Delta, \Delta')$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, $d\tau' = dp'_x dp'_y dp'_z$ und $d\tau_\Delta$ das Produkt der Differentiale der Parameter, welche den Stoß bestimmen. Die Änderung der Anzahl der Teilchen mit gegebenem Impuls wird vom Verf. in Form einer Divergenz $\frac{\partial j_i}{\partial p_i}$ ausgedrückt, wobei für den Vektor j_i (Strom im Impulsraum) der Ausdruck

$$j_i = \int d\tau' \left(n \frac{\partial n'}{\partial p_i} - n' \frac{\partial n}{\partial p_i} \right) \alpha_{ik}; \quad \alpha_{ik} = \frac{1}{2} \int \Delta_i \Delta_k w d\tau_\Delta$$

abgeleitet wird. Die α_{ik} werden für den Fall Coulombscher Wechselwirkung größenordnungsmäßig berechnet. Die kinetische Gleichung (T Temperatur, E_i elektrisches Feld) lautet:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial T} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + e E_i \frac{\partial n}{\partial p_i} + \frac{\partial j_i}{\partial p_i} = 0.$$

Auf Grund dieser Resultate wird die Größenordnung der freien Weglänge des stoßenden Teilchens bestimmt sowie die Geschwindigkeit des Temperatureausgleichs von Ionen und Elektronen im Plasma.

V. Fock (Leningrad).

Ornstein, L. S.: On the scattering of neutrons in matter. IV. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 39, 1166—1170 (1936).

Im Anschluß an seine früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 15, 282) diskutiert Verf. das Verteilungsgesetz für Neutronen in einer sehr dicken Schicht („Halbraum“) für den Fall, daß seit $t = -\infty$ Neutronen mit konstanter Geschwindigkeit und konstanter Intensität senkrecht zur Grenzfläche auftreten.

Casimir (Leiden).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Angenheister, G.: Bodenschwingungen. *Erg. exakt. Naturwiss.* 15, 310—364 (1936).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Polarization of elastic waves generated from a plane source. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 14, 489—504 (1936).

Die Polarisation von einer ebener Störquelle ausgehender elastischer Wellen wird eingehend untersucht.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada: The effect of differences in the media on the distribution of displacements in seismic wave front. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 14, 506 bis 513 (1936).

Breiten sich von einer kugelförmigen Störung transversale elastische Wellen aus, so zeigt sich, je höher die Rigkeit des Untergrundes ist, durch die die Wellen

laufen, eine um so ausgeglichene Bewegungsverteilung in der Wellenfront. Je weniger rig der Untergrund ist, um so ausgesprochener ist die Bewegungsverteilung.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Energy dissipation in seismic vibrations of an eight-storied structure. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 514—523 (1936).

Es wird in Weiterführung früherer Arbeiten (Zbl. Mech. 5, 165) über die Bewegung eines achtstöckigen Hauses unter dem Einfluß von Erdbebenbewegungen berichtet, wobei als Beispiel ein achtstöckiges Haus aus Eisenbeton untersucht wird. *Brockamp*.

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: On the seismic vibrations of a Gozyūnotō (Pagoda). Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 525—532 (1936).

Es wird die Bewegung einer fünfstöckigen Pagode untersucht, deren totale Höhe rund 24 m beträgt. Die effektive Höhe ihrer elastischen Teile ergibt sich zu rund 7 m. Aus diesem Grunde ist die Pagode weitgehendst erdbebensicher. Die durch Bodenbewegung verursachten Spannungen sind klein. Wegen der großen Energiezerstreuung im Boden bleibt selbst bei Resonanz die Spannung verhältnismäßig gering. *Brockamp*.

Janowsky, B. M., and G. N. Kalitina: On the determination of the magnetic parameters. Trans. Centr. Geophys. Observ. H. 5, 64—82 (1936) [Russisch].

Cet article contient une étude détaillée du procédé proposé par A. Schmidt pour la détermination des paramètres des deux aimants et des coefficients de distribution p et q qui interviennent dans le calcul de la composante horizontale H du champ magnétique terrestre. La théorie des erreurs développée dans cet article et les observations minutieuses relatées amènent les auteurs à la conclusion que contrairement à ce que l'on croyait jusqu'ici le procédé de A. Schmidt n'est pas suffisamment précis et en déterminant p et q par son procédé on ne peut pas calculer H avec précision voulue. A la fin les auteurs proposent d'employer les aimants sphériques pour lesquels p et q sont pratiquement nuls qu'ils croient possible de réaliser en acier à cobalt. *E. Kogbeliantz* (Téheran).

Stefaneseu, Sabba S.: Sur les fondements théoriques de la prospection électromagnétique par courant alternatif à très basse fréquence. Beitr. angew. Geophys. 6, 168—201 (1936).

Vorausgesetzt wird planparallel zur Erdoberfläche geschichteter Untergrund sowie sinusförmiger Wechselstrom, wobei die Frequenz gegen Null konvergiert. Es handelt sich darum, das elektromagnetische Feld eines dem Boden zugeführten Stromes in Abhängigkeit von der dort herrschenden Leitfähigkeitsverteilung zu berechnen. Solche Untersuchungen sind bereits für viele Fälle durchgeführt, jedoch meist auf umständliche Weise. Der Autor führt zwei neue Vektorfelder M und N ein, die folgendermaßen definiert sind. Ausgehend von dem magnetischen Feld $K = \Re(H e^{i\omega t})$ und dem elektrischen Feld $E = \Re(E e^{i\omega t})$ soll $M = i \lim_{\nu=0} \left(\frac{\partial H}{\partial \nu} \right)$ und $N = i \lim_{\nu=0} \left(\frac{\partial E}{\partial \nu} \right)$ sein. Es wird auf dieser Basis zunächst der Fall einer an der Oberfläche ausgebreiteten Kreisschleife, dem Vorgehen von Koenigsberger und Nunier folgend, behandelt. Besonderes Interesse verdient der Fall, in dem der Radius der Kreisschleife gegen Null strebt, wobei sich die Beziehungen erheblich vereinfachen. Ferner werden behandelt der Fall einer rechtwinkligen Schleife sowie der eines beliebig geformten Leiters und der eines (vertikalen und horizontalen) Dipols. *J. N. Hummel* (Berlin).

Belluigi, A.: Lineamenti teorici del carotaggio elettrico. Atti Accad. Gioenia (Catania, VI. s. 1, mem. 19, 1—13 (1936).

Der scheinbare spezifische Widerstand, der in Bohrlöchern mittels der Wennerschen Vierpunktmethode gemessen wird, steht in keiner einfachen Beziehung zu den wirklichen spezifischen Widerständen der durchbohrten Schichten. Insbesondere fallen die Unstetigkeiten der gemessenen Kurven nicht immer mit den Diskontinuitäten des geologischen Gefüges zusammen. Für verschiedene Anordnung der Basispunkte, für zwei und drei Schichten sowie für eine kugelförmige Einlagerung werden berechnete

Kurven gezeichnet und diskutiert. Erforderlich hierzu ist die Kenntnis der Potentialfunktion im inhomogenen räumlich ausgedehnten Medium. *J. N. Hummel* (Berlin).

Blinova, E. N.: Regarding the inclinations of the surfaces of discontinuity of an oclusion. Trans. Centr. Geophys. Observ. 4, 69—73 u. engl. Zusammenfassung 73 (1935) [Russisch].

A connection is given between the temperatures and the inclinations of three surfaces of discontinuity in the point of their intersection:

$$\frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}}{\operatorname{ctg} \beta_1 - K} + \frac{\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1}}{\operatorname{ctg} \beta_2 - K} + \frac{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}{\operatorname{ctg} \beta_3 - K} = 0$$

(T_1, T_2, T_3 = temperatures, $T_1 < T_2 < T_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ = inclinations of the surfaces of discontinuity between the warm and the cold, the coldest and the warm, the coldest and the cold masses respectively; $K = \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \alpha$, φ = latitude, α = angle between the direction of the frontal line and that of the parallel). Then the inequality $\beta_2 < \beta_3$ is proved.

I. Kiebel (Leningrad).

Smirnov, N. S.: Über die Lösung der Austauschgleichung. Trans. Centr. Geophys. Observ. 4, 52—62 u. deutsch. Zusammenfassung 62 (1935) [Russisch].

La résolution de l'équation $\frac{\partial}{\partial z} \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(t, z)$ (φ et f = fonctions données) aux conditions limites linéaires et aux conditions initiales arbitraires se réduit à la construction des intégrales d'une certaine équation différentielle ordinaire (du deuxième ordre) et aux quadratures. La résolution de l'équation non linéaire $\frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t, u) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(t, z)$ aux conditions initiales arbitraires et aux conditions limites: $u(a, t) = \omega(t), \left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right)_{z=b} = 0$ est donnée par les approximations successives.

I. Kiebel (Leningrad).

Jeffreys, Harold: The oscillations of the atmosphere. Proc. Roy. Soc. London A 157, 535—537 (1936).

In einer früheren Abh. hat Jeffreys die Winde berechnet, die auf der rotierenden Erde als Folge einer gegebenen periodischen Variation der Temperatur entstehen [Quart. J. R. Met. Soc. 52 (1926)]. Da diese Abh. von einigen Meteorologen mißverstanden worden ist, wird der Gedankengang näher erläutert. *T. Gustafson* (Lund).

Sakuraba, S.: Contribution to the mathematical theory of the general circulation of the atmosphere. Geophys. Mag. 10, 331—344 (1936).

Die bekannte klassische Theorie der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation von A. Oberbeck (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1888) wird in der Weise erweitert, daß die durch die Erddrehung hervorgerufenen Zentrifugalkräfte in Rechnung gesetzt werden und ihr Einfluß untersucht wird. Dabei ergibt sich, daß in mittleren Breiten die Zentrifugalkraft den von Oberbeck errechneten Bewegungen entgegenwirkt, dagegen sie in höheren Breiten verstärkt. Eine genauere Abschätzung des Effektes ist infolge der Kompliziertheit der Rechnung sehr schwierig.

H. Philipps.

Swann, W. F. G.: A numerically consistent corpuscular theory of cosmic rays. Physic. Rev., II. s. 50, 1103—1119 (1936).

Es wird versucht, die Absorptionskurven und den Breiteneffekt (einschließlich seiner Variation mit der Höhe) der Höhenstrahlen formal darzustellen unter den Annahmen, daß ein primäres Teilchen gebremst wird a) durch Ionisation unabhängig von seiner Energie, b) durch Erzeugung von Sekundärteilchen proportional zu seiner Energie. Mit der Hypothese von zwei Arten von Primärteilchen von verschiedener Wirksamkeit für den Effekt b) und mit speziellen Annahmen über die Verteilung ihrer Primärenergien können eine größere Reihe von Beobachtungsergebnissen wiedergegeben werden, wobei die zur Verfügung stehenden Konstanten noch in verschiedener Weise adjustiert werden können.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Shon, F. W.: Transforming the stereographic map. (17. ann. meet. of the Amer. Geophys. Union, Washington, 30. IV.—2. V. 1936.) Nat. Res. Council. Pt 1, 100—101 (1936).